新科学知识小丛书



奇情妙趣的图
——图论拾趣

史明仁　张丽丽　编著

湖北人民出版社

责任编辑：马　捎
封面设计：李泽霖

奇情妙趣的图
——图论拾趣
史明仁　张丽丽 编著



湖北人民出版社出版、发行 新华书店湖北发行所经销
湖北人民出版社蒲圻印刷厂印刷
787×930毫米32开本 4.375印张 3插页 7.1万字
1989年7月第1版　1989年7月第1次印刷
印数：1—1 810
ISBN 7—216—00401—9
C·36　　定价：1.65元

编 者 絮 语

本丛书集合科学各界力量，以编、撰、译诸形式推出一系列介绍本世纪以来国内外兴起的各门新学科知识的读本。

本丛书替求知者打开一扇扇明净之窗，使你扩展视野，汲取新知识，开启新观念，永远跟上时代的脉动，更让你体会新奇世界的美。

本丛书以中等文化层次的青年为主要读者对象，选题侧重于与之思想、学习、生活相关较切的社会科学、自然科学以及两者融汇而成的新学科。任何一人，都可从中找到关切的问题。

本丛书力图减少读者的经济负担并便于阅读，故以通俗的知识性小册子形式出版。一门学科一册，每册字数一般不出五万。一册在手，你无论怎样繁忙，都可于片暇间将它阅读完毕。

本丛书无意采用学术著作的沉闷结构和过多使用专业性的术语，而尽量做到行文流畅、通俗生动，既具知识性，又备趣味性，你能读懂，也能感兴趣。

本丛书介绍各个学科的起源、发展、现状、流

派及代表人物、研究对象、内容、方法等等。由于小的特点，它可有选择性地介绍尚未完全形成系统的新学科，以推动这些学科的进一步发展。

收藏这套丛书，若干年后你的书架将有光彩。

翻开这一页，你走向新天地。

湖北人民出版社

青年编辑室

1987.1.6.

前　言

我们曾经对那些智力游戏喜欢到着迷的程度：狼羊菜渡河、分油问题、一笔画、走迷宫……。绞尽脑汁的苦苦思索，终于找到思路时的恍然大悟，求出答案时的又惊又喜，我们在趣味与智慧的王国中漫游。也许正是这样的魔力诱使我们走进数学的迷宫。

当我们在学习一门新的数学分支学科——图论的时候，又重温了昔日的情趣：这门在自然科学、社会科学各领域中日益有着广泛应用的学科，它的许多课题与狼羊菜渡河、一笔画等等智力游戏有着同样的数学模型。感谢湖北人民出版社青年编辑室的同志，使我们能把图论中一些饶有趣味的问题，引人入胜的巧妙解题方法撰写成册，奉献给与我们有同样爱好的读者。希望读者能与我们共享在一番冥思苦想以后终于获得解答的由衷喜悦。“不动笔墨不读书”，倘若读者能实践这句格言，那么在读完这本小册子后定有所获。

笔者力图写得浅显易懂，寓科学性于趣味

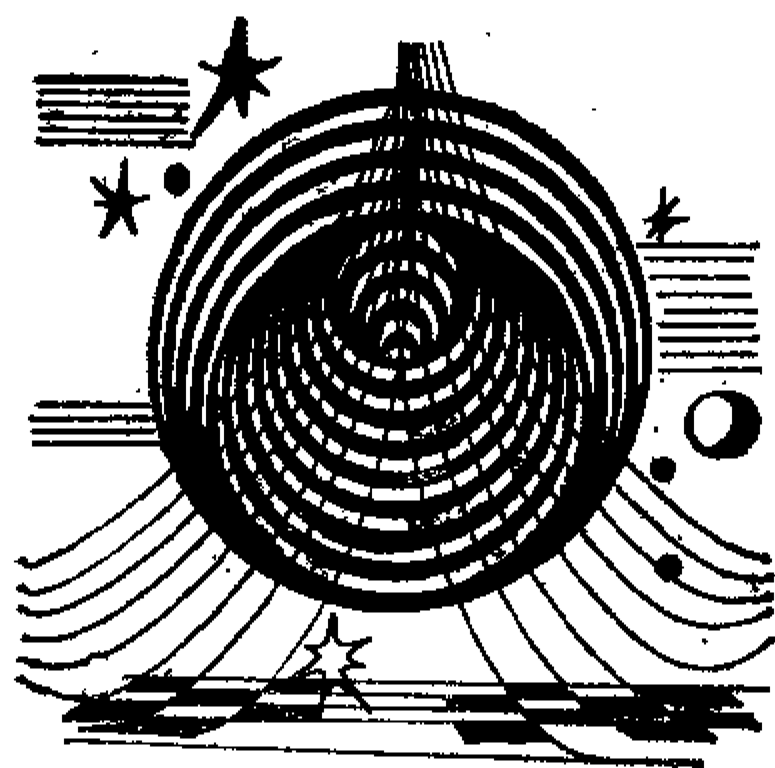
性之中；企望能以勤补拙，不至于因为笔者的寡闻陋见、功力浅薄而使上述愿望成为奢望；并希冀广大读者与师长、同行的指正。

史明仁　张商鹏

1987年8月

目　录

什么是图





我们要介绍的“图”是什么呢？它既不是我们日常所见的形形色色的图——地图、机械零件图、建筑施工图；也不是几何中各种各样的图形。

在说明本书所介绍的图为何物时，鉴于“一切人类知识以直观始”。（康德）“一个好的实例胜于训诫。”（波利亚）还是让我们先看几个例子吧。

图的例子

例1.1 初看小说《红楼梦》时，你一定会感到人物众多，头绪纷杂。但如果你把贾府中的人物（为简便起见，只考虑男人）画成这样一个图：以点代表人，在有父子关系的两人（两点）间连一条带箭头的线，从父亲指向儿子（如图1—1所示），这样，你对贾府中人物之间的血统关系就会一目了然。

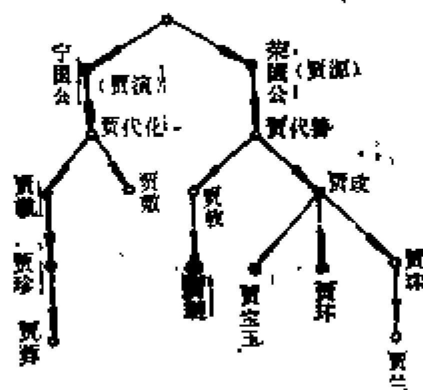


图 1—1

例1.2 假如我们仍以点代表人，但两点之间

是否连线，视这两人是否有直系亲缘关系而定。由于直系亲缘关系是相互的，这里的线不带箭头。那么，贾政、王夫人、元春、贾宝玉、贾珠这五个人之间的关系可以用图1－2来表示。这个图有一个特点，任何两个点之间都有线相连。这是因为任何两人之间都有直系亲缘关系；或夫妻，或父子，或母女，或姐弟等等。

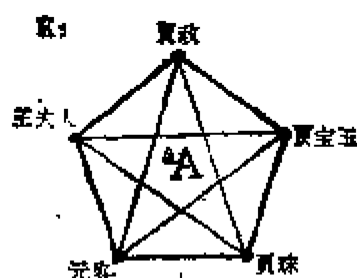


图 1－2

例1.3 假若你想作一次乘火车或轮船的旅游，从沈阳出发，去大连、天津、南京、上海、杭州、苏州、无锡等城市，再回到沈阳，则可以点表示你要去的城市，两城市间可以坐火车或轮船直达的，就连一条线（见图1－3）。此时，你要设计一条每个城市都经过且只经过一次的旅游路线，就比较容易了。从图上可以看出，沈阳⟶天津⟶南京⟶无锡⟶苏州⟶杭州⟶上海⟶大连⟶沈阳，就是这样一条路线。

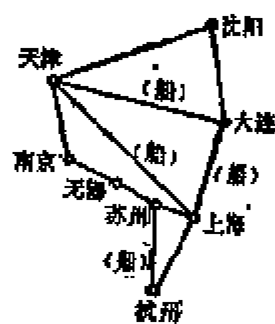


图 1－3

例1.4 有四位教师，四门课程。若教师甲能教物理课，则在代表教师甲与物理课的两点之间连一条线。图1－4就是这样得到的。如果要作一种工作分派，使每个教师各自教一门不同的课，有了

图1—4后，就容易看出：甲教物理、乙教政治、丙教数学、丁教化学，就是一种安排，图上用粗线表示。

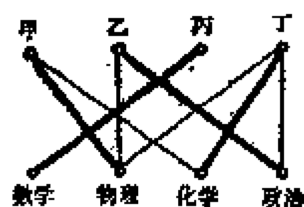


图 1—4

例1.5 为表示一个化学分子的结构，我们可以用一个点代表一个原子，两个原子之间有几价化学键，就连结几条线。图1—5就是碳氢化合物苯的分子结构图。

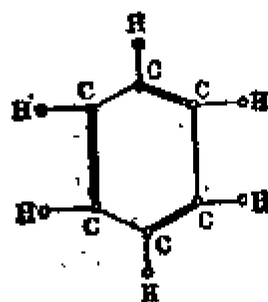


图 1—5

什么是图

从上面几个例子可看出，客观世界里的人、事物或现象，如果两两之间有某种联系，称为二元关系：如例1.1中的父子关系，例1.2中的直系亲缘关系，例1.3中两城市之间有无火车或轮船可直达的关系，例1.4中某教师能否教某课程的关系，例1.5中两原子之间的结构关系和有几价化学键的关系，等等，当我们要研究这种二元关系，从中找出规律时，可用点表示人、事物或现象，两点之间用线相连，表示它们之间存在我们所要研究的那种联系。这样就可以得到反映客观实际问题中

二元关系的一个数学模型——图。

简而言之，我们所说的图，就是由一组点和连线所构成的图形。这些点，我们称作图的顶点，而连线则称为边。带箭头的边特称为有向边。

用图来表示一些客观实际问题，会使问题变得简明、直观和形象化。“因为没有什么东西比图形更容易进入人们的思想”（这里，我们把笛卡尔的名言中“几何图形”四字“偷换”成“图形”了）。对图进行研究，等价于对某些实际问题（中的二元关系）的研究。上面我们举的几个例子，若不用图来表示，而改为文字叙述，那么，即便有纵横捭阖的口才，仍会令人如堕五里雾中。

要注意的是，我们讨论的图与几何图形的不同之处是：在几何图形中，点的相对位置与连线的长短曲直都是至关重要的。而图论所关心的只是一个图有多少个顶点，以及哪些顶点之间有边相连。至于顶点的位置分布和边的长短曲直，则无关紧要，可以任意描画。只要不改变两顶点间是否有边相连这一本质，我们认为这样任意描画的两个图是一样的（在图论中称这样两个图是同构的），因为这样不改变有关二元关系的性质。例如图1—6与图1—3的两个图，在图论中被认为是一样的。把两个图的顶点作如下对照：

A——沈阳，B——天津，C——大连，D——

南京，E——无锡，F——苏州，G——杭州，H——上海；那么，图1—6也表示这些城市两两之间有无火车或轮船可直达的关系。

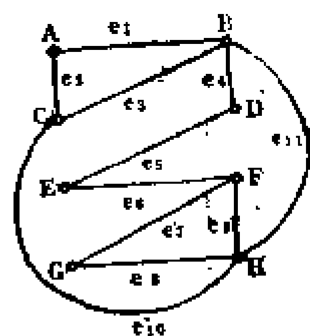


图 1—6

另外，在几何图形中，把边看作由许多点组成的；而在图论中，边的唯一作用只是把两个顶点连接起来，因为它只表示两个顶点所代表的人、事物或现象之间存在某种联系。也正因为这样，一个图中任何两条边，我们认为它们只可能在顶点处相遇。在别的地方，任何两条边看作立体交叉。画在平面上时，那些在平两几何中的“交点”，例如图1—2的A，不是图的顶点。

一些图的名称

前面提到的几个图，在图论中都是比较重要的。所有边都是有向边的图，称为**有向图**，例如图1.1；所有边都没有方向（不带箭头）的图，称为**无向图**，除图1.1外，都是无向图。

另外，图1—1又可叫作**有向树**，把它所有边

的方向全去掉，得到的图叫**无向树**，简称为**树**。你看，它多象一棵倒放的树。

象图1—2那样，任何两个顶点之间都有边相连的无向图称为**完全图**，或形象化地称它为“家庭”（family）。n个顶点的完全图特记为K_n。图1—2是K_5— 有五个“成员”的“家庭”。而一般的非完全图，可以叫作一个“社会”(society)，它顶点之间的关系象社会那样形形色色。

两个顶点间最多只有一条边相连的无向图称为**简单图**。图1—5就不是简单图，它有三对顶点之间有两条边。前面提到的无向图中，除它以外，都是简单图。

图1—4的顶点可以分为X与Y两部分，代表教师的四个点与代表课程的四个点，分属不同部分；同属于X或同属于Y的任两个顶点间(教师与教师、课程与课程之间）均无边相连。这种图叫**二部图**（或二分图、偶图）。

图论发展简况

图论的最早研究，可以追溯到瑞士数学家欧拉（E·Euler）在1736年发表的讨论当时普鲁士哥尼斯堡城的“七桥难题”的论文（详见

第五章）。早期的一些与图论有关的研究，几乎都象“七桥难题”一样，与有趣的数学游戏有关。例如1859年英国数学家哈密尔顿发明的“环球旅行”的数学游戏（详见第七章），就是后来图论中“哈密尔顿问题”与“货郎担问题”的起源。这类问题是思想的体操，很能推动人们去思索。它们的解答，常常是机智巧妙，引人入胜的。

1847年，物理学家克希荷夫为求解电网络方程，发表了关于树的第一篇论文，这是图论发展的重要标志。现代电网络的拓扑分析方法就是在他开创的方法基础上发展起来的。

1857年，英国数学家凯莱利用树的概念研究有机化合物的分子结构。1878年，凯莱的一位朋友雪尔佛斯脱（J·Sylvester）在英国自然杂志上发表一篇论文，首次正式使用“图”这个名词。

1850年，英国人格思里提出著名的四色猜想：任何一张平面地图，都可以用四种颜色来染色，使得任何两个相邻的国家所染颜色不同（详见第九章）。此后100多年，一代接一代的数学家，都十分感兴趣地致力于四色猜想的研究。

一般认为，系统研究图的性质的第一个人是匈牙利数学家哥尼格（D·König）。他在1936年发表第一本图论专著《有限图与无限图的理论》。从1736年欧拉发表讨论“七桥难题”的论文到1936年

哥尼格的专著出版，这200年标志着图论发展的漫长历程。

近二三十年来，在电子计算机蓬勃发展的大力推动下，图论作为组合数学的一个分支，新军突起，活跃异常。过去的趣味数学，也被赋予新的严肃的科学目的。今天，图论已在运筹学、电路网络、计算机科学、开关理论、编码理论、计算机辅助设计，甚至化学、社会学等许多领域得到广泛的应用，并成效卓著。

本节的最后，我们准备再以一个智力测验题来说明，怎样把一个实际问题巧妙地化为图论问题。

例1.6 在一本名叫《美国数学月刊》的杂志上，登载过这样一个智力测验题：任何六个人在一起集会，以下两种情况至少有一种必然发生：或有三个人彼此认识，或有三个人彼此不认识。

它不是代数题，也不是几何题。仔细分析，它是讨论两人认识或不认识的关系，也就是二元关系，所以可以归结为图论问题。按照前面对图的定义，一个图只表示一种二元关系，所以需要画两个图：都用顶点代表人，第一个图中，两人相互认识的连一条边，而第二个图中，两人互不认识的，才连一条边。我们在图的概念上，再加一个“染色”的

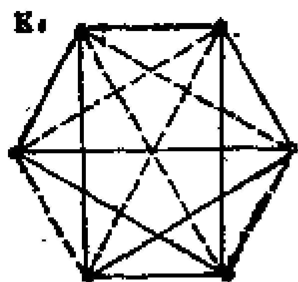


图 1—7

概念，可以把两个图画在一起。以六个顶点代表六个人，两人互相认识的，在相应两顶点间连一条红色边（图1—7中以实线表示），两人互不认识的连一条蓝色边（以虚线边表示）。由于两个顶点之间不是以红色边相连，就是以蓝色边相连，所以全部红、蓝边一起构成一个完全图K_6。若有三人彼此认识，则图中应出现一个红边三角形；若有三人彼此不认识，则图中应出现一个蓝边三角形。因此原问题就变为下列问题：完全图K_6的任一边染成红色或蓝色之一，则其中必出现一个红边三角形或一个蓝边三角形。图1—7中出现两个蓝边三角形。读者自己也可以画画试试。

上述结论可以严格证明如下（看不懂的读者可以略过这一段）：从六个顶点中任何一点A开始考虑（见图1—8），有五条边以A为一个端点。这五条边总有三条边染同样的颜色，不妨设为红色（如果是三条蓝色边，也可类似证明），它们另一端点记为B、C、D；现在考察△BCD，若它三边全染为蓝色，则已证得图中有一个蓝边三角形。否则，它总有一边为红色，若边DC为红色，则△ACD就是一个红边三角形，其它两边BD或CB为红色，同样图中出现

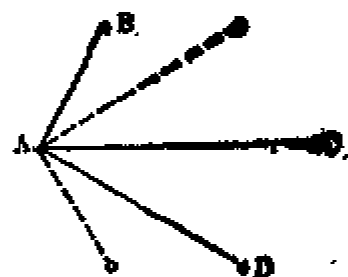


图 1—8



红边三角形ABD或ACB。

类似的智力游戏题还有：

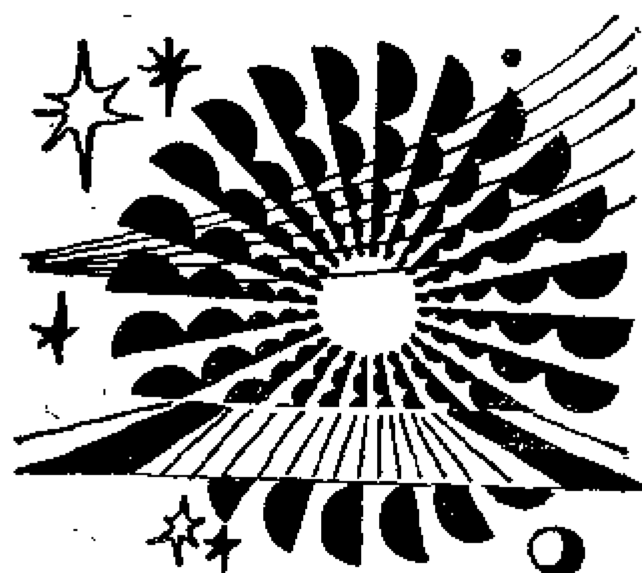
“在10个人集会时，必有三个人彼此认识，或四个人彼此不认识。”

“在20个人集会时，必有四个人彼此认识，或四个人彼此不认识。”

现在，你一定会把它们“翻译”为图论问题。这一类问题在图论中称为兰姆赛问题。它是由年轻的英国逻辑学家兰姆赛（F·P·Ramsey）首先研究的。可惜他宏才远志，厄于短年，1930年去世时，年仅26岁。

树——密码——街和广场

——连结问题和贪心算法



树是一种重要的图，要了解树的确切含义，还需要介绍几个概念，它们在以后还要经常用到。

几个概念

1．**路** 图论中的路与日常生活中所说的“路”十分相似。以图1—6为例，我们可以问：“从A（沈阳）到H（上海）走哪条路？”图2—1给出了三个答案。从图论角度看，它们都是

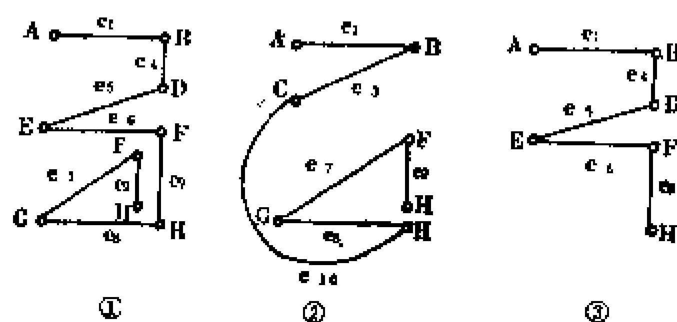


图 2—1 路

从一个顶点出发，交替地经过一些边和顶点，最后到达另一个顶点。这样形成的图称为路。图2—1中三条路是不同的。③中的路最简单，顶点和边都不重复出现（实际上，只要顶点不重复，边就一定不重复），称为点不重路。②中的路边不重复，但顶点H重复（上海被经过两次），称为边不重路。

而①中的路，由于边e_9重复（苏州到上海这一旅程重复），这条边的两个顶点F与H也重复，这是一般的路。

2.回路 一条路的起点和终点都叫路的端点，其它顶点称为路的中间顶点。两端点重合的路称为回路。图2—2画出了三条回路。其中③是中间顶点不重复的回路，称为圈；而②称为边不重回路；①是一般的回路，它的边e_1重复，中间顶点B重复。

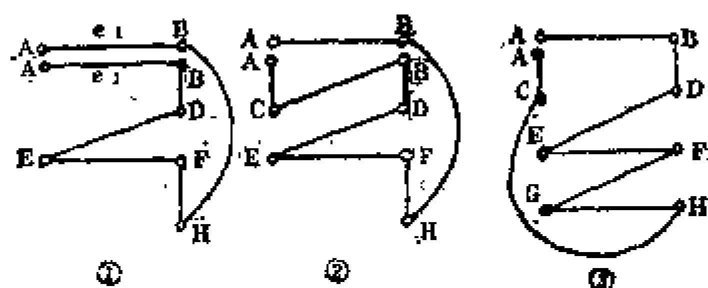


图 2—2 回路

3.连通 一个图中任何两个顶点都有路把它们相连时，称这个图为连通图。前面画的那些无向图都是连通的。而图2—3是不连通的，顶点A、B、C、D中任一个顶点与顶点E或顶点F、G、H无路可通。图中有几个彼此连通的部分称为有几个连通分支。图2—3有三个连通分支。

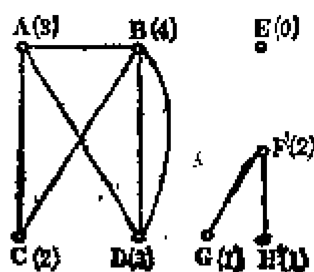


图2—3 有三个连通分支的图

4.度 与某个顶点相连的边数，称为这顶点的

度。图2—3中各顶点的度数写在右侧括号内。当你把一个图看作是街道交通图时，顶点的度数就是交叉路口的“叉数”。图2—3中，A是三叉口，B是四叉口，G与H是一叉口（死胡同），E是“孤岛”。在化学分子结构图中，一个顶点的度数就是一个原子的化合价。

5.**树** 现在，我们可以给出树的确切含义了：一个无圈的连通图称为树。自然界中的“树”的特征是枝枝杈杈、根叶相连，“无圈”与“连通”也正表征了这两个特点，故图论借用了“树”这个名称。树的最上面的一点叫根或祖先（在家谱图里，它正是代表祖先），一度点叫树叶；任何一条边的两个端点，离根近的叫父亲，离根远的为儿子。正是因为一个家谱图就象一个树，所以树中的一些术语也沿用了家谱中的一些名称。不过，图论中的树与自然界的“树”或家谱图还是不一样的，例如我们可以把一个树重画，使得你任意选定的点作为根。

密码问题

由于树中没有圈，所以树中任何两个顶点之间，只有一条点不重路。这是因为一个树

画好以后，即它的根定下来以后，就可以把它当成一个家谱图。若有两个人（顶点），甲是乙的长辈，那么因为一个人只有一个父亲，一个祖父，一个曾祖父……，所以从顶点乙到顶点甲只有一条点不重路。假如其中一个不是另一个的长辈，它们既然在同一个家谱中，往上追溯，必有同一长辈丙，由于甲与乙各自到丙的点不重路只有一条，所以乙到甲也只有一条点不重路（从乙到丙的点不重路加上从丙到甲的点不重路）。

树的这一特点可以应用在编码理论上。

例2.1 仅用数字0与1来编制密码（称为二进制码），假如按下列方法编码：

E	N	O	S	Y
10	001	011	11	00

当我们接收到一个没有分隔符的密码001011时，既可以译码为

00	10	11
Y	E	S

是英文中的"是"，也可以译码为

001	011
N	O

是英文中的"不"，这就会使人莫衷一是。消除这种误解的一种方法是：作一个二分树，树的每个顶点向下只有两个分叉，左侧边表示码字0，右侧边

表示码字1；或者说，每个父亲都只有两个儿子；到左儿子的边代表0，到右儿子的边代表1，见图2—4（1）。由于从根到某顶点只有一条点不重路，把这条点不重路所经过的边上的码字依次排列就得到一个二进制数，这个数可以代表该顶点。这时，当我们取图2—4（1）的五个树叶的二进制数作为编码时：

E	N	O	S	Y
10	001	011	11	000

刚才那个没有分隔符的密码001011就只能译为

001	011
N	O

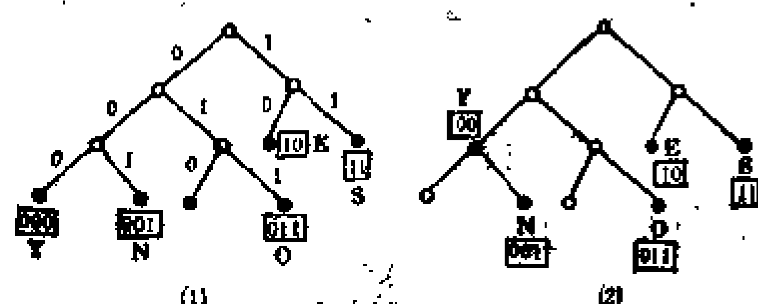


图　2—4　二分树与编码

不会再产生歧义。这是因为从根到任何一个树叶的点不重路，不会经过另一个树叶。而前面那种编码法，画到二分树上后（见图2—4（2））可以看到从根到树叶N（编码为001）的点不重路恰好经过另一个编码点Y（00）——这是由于Y不是树叶，因此会产生歧义。

街与广场

任何一个连通图，若它无圈，那么它就是树；若它有圈，则去掉这个圈上任何一边，得到的新图仍然连通；若还有圈，再去掉圈上一条边，……用这种"破圈法"，把一个连通图的一些边去掉后，最后可得到仍然连通，并且无圈的一个新图。它就是一个树，这个树称为原图的一个生成树。

一个图是否连通，等价于这个图是否存在生成树，（可以在电子计算机上求生成树或证明原图不连通。）

例2·2 （谣言传播者）有一个小村庄，其中某些村民日常互相闲谈。问：有一个谣言能否传遍全村？

解：作一个图，每个顶点表示一个村民，若某两个村民日常相互交谈，则在相应的两顶点间连一条边。当所作的图连通时，即存在生成树时，此谣言能传遍全村，否则就不能传遍全村。

任何一个树，它的边数总等于它的顶点数减一。这是因为，除掉根这个顶点以后，每条边都可以与它两端点中离根远的端点配对，因此它的边数

比它的顶点数少一（缺一条边与根配对）。

例2·3 （街与广场的命名问题）假设有这样的街道与广场：任何两个广场之间，最多只有一条街。现在要问：

（1）什么情况下每条街都可以用它一端的广场来命名？（例如某街一端有一广场叫“中山广场”，那么这条街就取名为“中山路”）

（2）什么情况下每个广场都可以用与其相连的某一街来命名？

解：以广场作顶点，以街道为边作一个图G。问题（1）在两种情况下有解。

情况一：图G是一个（无向）树，例如象图2—5那样（图中箭头的含义在后面说明）。我们已经说过，树除去根以外，每一边均可以与它两端点中离根较远的那个端点（即“儿子”）配对。所以每条街道，均可以用离根远的那一端广场来命名。图2—5中，每条街道均可用它箭头所指的广场来命名。

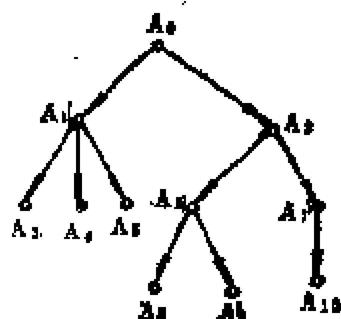


图 2—5

情况二：G中有一个圈C，并且去掉C的所有边后，任一连通分支都是树（零度点本身也算一个树），也即这些树都以圈C上某一点作为根，象图

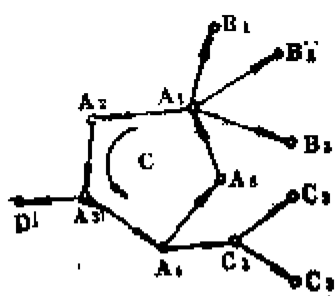


图 2—6

2—6那样，去掉圈C所有边后，五个连通分支全为树，分别以A_1、A_2、A_3、A_4、A_5为根。由于圈C上的顶点数和边数相等，所以C上的每条街可按逆时针方向（也可按顺时针方向），用其前一端的广场来命名。每个树形上的街道按情况一命名，由于它们的根在圈C上，树形上街道不会以圈C上广场来命名。所以每条街均可与一个广场配对。图上每条街用其箭头所指广场命名。

问题（2）。我们知道，给定n个顶点以后，可以作出很多过这些顶点的连通图，其中边数最少的连通图一定是树。（一个连通图，若不是树，一定还可以用破圈法删去一些边，变为树；而树中任两个顶点之间只有一条点不重路，所以树删去任何一边，一定变为不连通），因此假如图G是树，那么，由于它的边数（街道数）比顶点数（广场数）少一，所以每个广场不可能取不同的街名。

当一个连通图不是树时，它的边数就大于或等于顶点数，这时就可以使每个广场用与它相连的一条街来命名。其方法如下（见图2—7）：

先用破圈法删去它的若干条边，使其成为（生成）树，图2—7中删去的边以虚线表示。然后任

选一条删去边，比如选边AK，以它的任一端作为生成树的根，例如取A为根，则生成树中除根A以外，顶点可与边配对，也就是说，除广场A以外，每个广场均可用与其相连的一街来命名。最后，我们以删去边（街）来命名根（广场）A。图2—7中箭头所在的那条街与箭尾所在的广场配对。

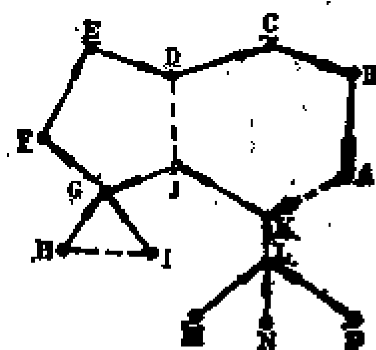


图 2—7

问题（1）的情况二，既可以使每条街以其一端的广场命名，同时又可使每个广场以与其相连的一街来命名。即顶点与边恰好一一配对，而无剩余的顶点或边。

连结问题与贪心算法

树是给定顶点以后边数最少的连通图。这一性质在实际应用中十分重要。

例2·4　（连结问题）有五个城镇，要筑公路把它们连结起来，两镇直接连接，或经由其它镇连结都可以。每两个城镇之间的公路造价见图2—8。各边上所注数字（单位为万元），在图论中这叫作各

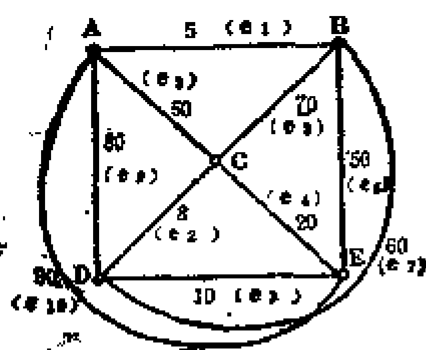


图 2—8

边的权数。问：这条公路该如何建造，使总费用最少？

解，这可以归结为求连结五个顶点的各边权数（费用）之和最少的一个生成树（图论中叫最优树）。为什么答案一定是树呢？因为假如不是树，又要求连通，那么它一定有圈，去掉圈中一边（等于少建一条公路）得到的新图仍连通，新图的公路总造价显然比原来低，所以不是树的连通图，它的公路总造价一定不是最少。

怎样来求最优树呢？“数学方法的功能不仅表现在为科学研究提供抽象而简洁的形式化语言，还表现在它为科学研究提供数量分析和计算方法。”最优树的问题可以在电子计算机上用克鲁斯克尔（Kruskal）的贪心算法来求解。它的步骤是这样的：

①先把各边按权数（造价）从小到大排好次序，权数相同的，谁先谁后都可以。图2—8中AB边排第一，在权数旁标以e_1，而AC和BE两边权数都是50，我们让AC排第五，记为e_5，BE为e_6。

②就象让一个贪心的孩子随便挑吃苹果时，他

每次总挑最大的吃一样，我们每次挑出权数最小的边，即排在前面的边，连结它的两个端点。例如，先用e_1连结A、B，再挑出e_2连结C、D……这样一条边、一条边地加上去（见图2—9）。

③当贪心孩子虽然挑到了最大的苹果，但苹果是烂的时，他一定会扔掉。同样，当一条新边加上去以后，产生一个圈（图2—9（4）中，当e_4加上去连结C、E后，产生圈CDEC），则这条边就废弃不用，而加下一条边。直到边数等于顶点数减一，这时已经得到一个树，可以证明，这个树就是要求的最优树。本题的计算过程见图2—9中（1）——（5）所示。

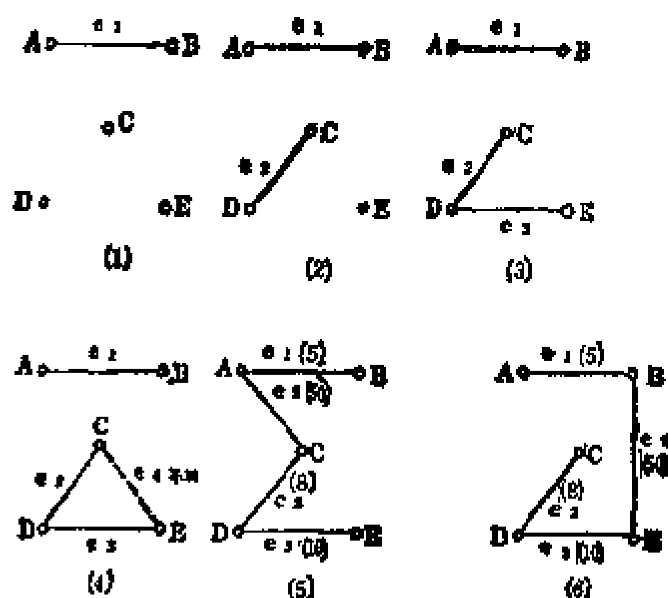


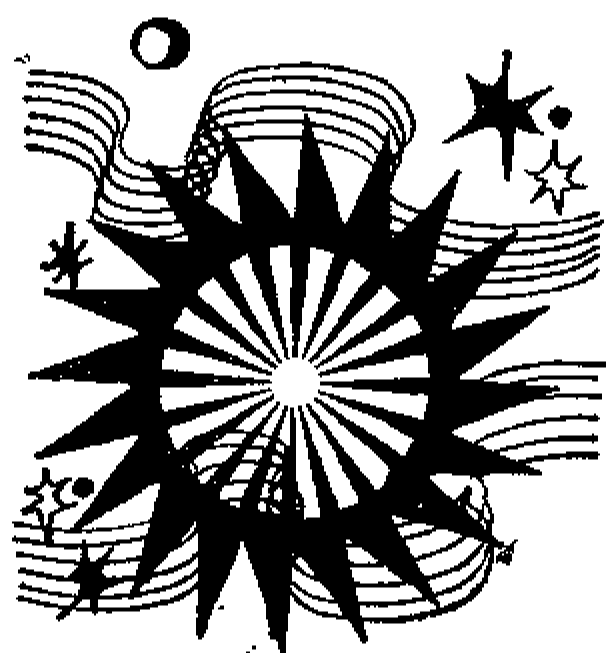
图 2—9

（5）所示的树就是答案，公路总造价为

$$5+8+10+50=73\text{（万元）}$$

注意，当各边权数互不相同时，答案（最优树）是唯一的。否则最优树不唯一，但它们总造价是一样的。如本题，假若我们让BE边为e_5，AC边为e_6，那么，按贪心算法得到的最优树如图2—9（6）所示，它的总造价也是73万元。

迷宫——高斯八后问题——先深搜索



“碰壁回头”走迷宫

“迷宫”常被用来表示还未洞悉的扑朔迷离的现实情况。意大利著名科学家伽里略说过：“没有数学语言和数学符号的帮助，人们就不可能了解它（指现实世界）的片言只语，没有它们，人们就会在黑暗的迷宫中徒劳地徘徊。”所以数学是打开科学迷宫的一把钥匙。

那么，智力游戏中的迷宫该如何走呢？数学同样也是打开这种迷宫的钥匙。经数学推理，走迷宫的方法可简洁形象地归纳为四个字——“碰壁回头”。

用“碰壁回头”法走迷宫是这样走的：从入口进去以后，贴着一侧墙前进，这时即使走过另一个入口，只要这个入口不在这侧墙，那就不进去，而是仍然沿这侧墙继续前进。一直走到尽头，“碰壁”以后才回头，转到另一侧墙。只有当一个新的入口在所走的那一侧墙，才进这个入口……，这样一定可以走到迷宫中央（有时是走到迷宫另一边出口处）。

“不撞南墙不回头”，本来是形容一个人冥顽不灵，不听别人忠告而胡干蛮干。但数学家们却从

"碰壁回头"走迷宫的方法中得到启迪，把这种策略变成电子计算机的一种算法，叫作"先深搜索方法"。这种方法可以用来解决许多图论问题，尤其在人工智能上，经常用到它的基本思想。

先深搜索

我们先解释什么叫搜索，再解释什么叫先深搜索。这里所说的搜索就是对各种可能的情况进行慎密周到、一点不漏的考察。从前一节的内容可知，当一个问题的各种情况可以画成一个图时，就化成了对图的每个顶点的考察，图论中称为对顶点"搜索"或"访问"。前一节我们按照图2—4那个二元树来编码，实际上就是从树根到每一个树叶的搜索，从而找到每一个树叶的密码。搜索的方法主要有两种，一种叫"先广搜索"，另一种就是由"碰壁回头"策略引导的"先深搜索"。用于树的"先深搜索法"的步骤为：先搜索树根，然后搜索它最左边的儿子；一般地，当一个顶点被搜索以后，下一步就搜索它的还未被搜索过的最左边的儿子，尽快地向纵深推进，直至搜索到树叶（没有儿子的顶点）——"碰壁"，然后就"回头"——返回到它的父亲，再从这个父亲的另一个未被搜索

的最左边的儿子继续搜索……象图3—1那样的树，“先深搜索”的次序为：①→②→⑤（返回②）→⑥（返回②，再返回①）→③→⑦→④→⑧→⑨→⑩。为说明如何用“先深搜索法”来解决问题，我们用著名数学家高斯提出的“八后问题”作为例子加以说明。

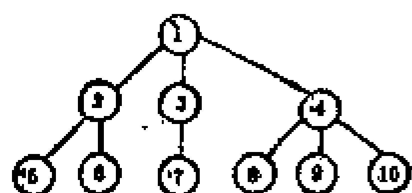


图 3—1

高斯八后问题

大家知道，国际象棋里的“皇后”可算是个“铁女人”，它不仅象中国象棋的“车”那样，可以吃掉棋盘上与它同一行或同一列的棋子，还可以吃掉同一条对角（斜）线上的棋子。高斯提出这样的问题：“现有八个皇后，要放到8×8的国际象棋的棋盘上，使得她们彼此不受威胁，即没有两个皇后位于同一行、同一列或同一对角线上。问：有几种放法？”

起初研究这一问题时，困难很大，高斯当时认为有76个解。1854年，不同的作者在柏林的象棋杂志上，总共只发表了40个解。实际上这个问题有92

个解，其中的12个解，我们写成8个数字的排列，列出如下：

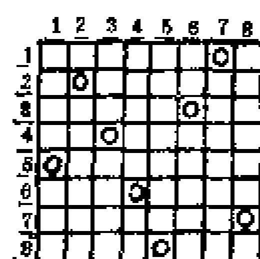
(72631485)　(61528374)　(58417263)

(35841726)　(46152837)　(57263148)

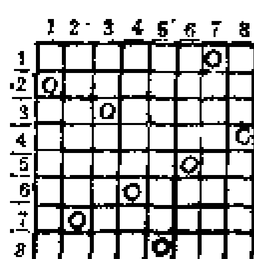
(16837425)　(57263184)　(48157263)

(51468273)　(42751863)　(35281746)

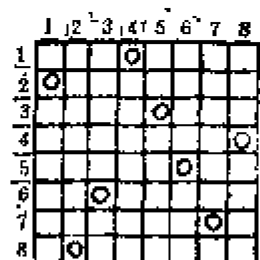
排列（72631485）中第几个数字表示第几行的皇后所放的列数：第一行皇后在第7列，第二行皇后在第2列，第三行皇后在第6列，……等等，见图3—2（1）所示。这样一个排列可画出一个图解。有了一个图解后，按逆时针方向分别旋转90°、180°、270°又可得出其它三个答案。图3—2（2）与（3）分别是（1）旋转90°与180°得到的新答案。（可能有重复的，例如（35281746）的图解旋转180°以后与原来一样。）再把每个图解作主对角线（从左上角到右下角的对角线）的对称图，又可得到新的答案，图3—2（4）是（1）按此法得到的新图解。



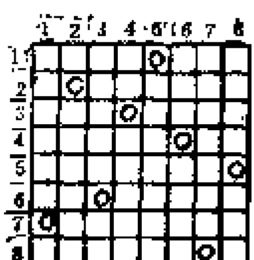
(1)（72631485）



(2)（71386425）



(3)（41586372）



(4)（52468317）

图　8—2

为简便而又说明问题，我们把“八后问题”的规模缩小为“四后问题”：“在 4 × 4 的棋盘上放四个皇后，使得没有两个皇后在同一行或同一列或同一对角线上。”看看怎样用“先深搜索法”来求解。

先考虑“任何两个皇后不能在同一行且不能在同一列”这个条件。当第一个皇后放在第一行某一列时，由于放在第二行的皇后不能与它同列，所以只有 3 个列可以放，而再放第三行的皇后，就只有 2 种可能放法，最后放下去的皇后只有一种选择。总的可能放法相当于甲、乙、丙、丁四个人排成一列，有多少种排法，或 1 、 2 、 3 、 4 这四个数有多少种排列。这共有

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{（种）}$$

我们用（ijkl）来表示24种放法，i、j、k、l 依次为第一、二、三、四行皇后所在的列数（这 4 个数各不相同，各取 1 、 2 、 3 、 4 这四个数字中某一个）。例 $i = 3, j = 1, k = 2, l = 4$ 即（3124）表示第一行皇后在第 3 列，第二行皇后在第 1 列，第三行皇后在第 2 列，第四行皇后在第 4 列这一种放法。记号（31••）则表示第一、二行皇后分别放在第 3 列、第 1 列，而第三、四行皇后还未放的状态。它们的逻辑关系，可写成图 3 — 3 所示的一张表，其最后列为四个皇后既不同行也不同列的24种

状态，

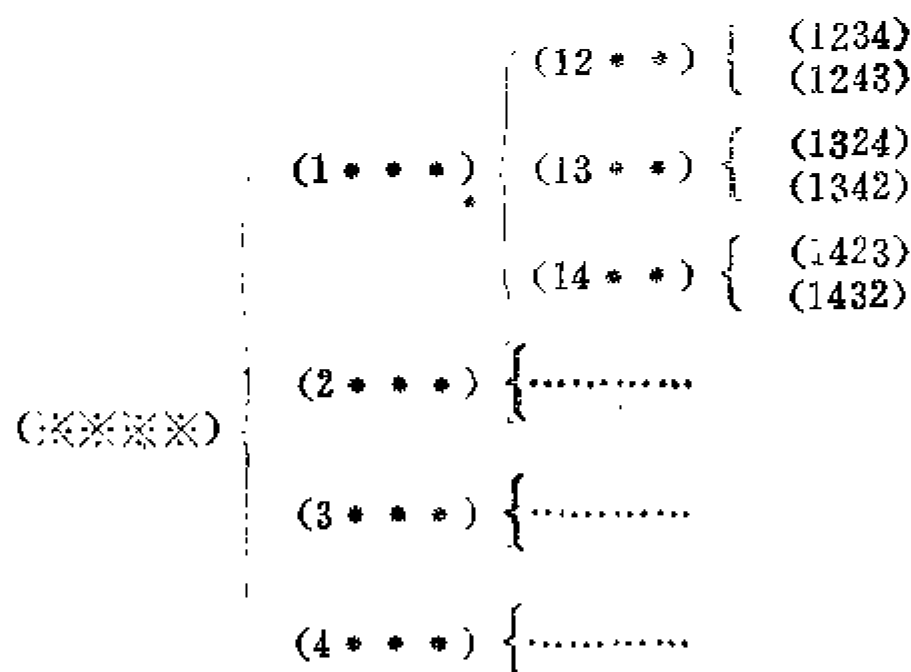


图 3—3

现在我们把表转化为图。表中每一种状态作为一个顶点。可作出一个树（称为状态树），见图 3—4。表中（12**）、（13**）、（14**）是状态（1***）的三个子状态（前三者都是后者在第二行再放下一个皇后得到的状态），则在图中，代表前三者的顶点是代表后者的顶点的儿子。树中每个顶点所代表的状态，可由根（****）到该顶点的点

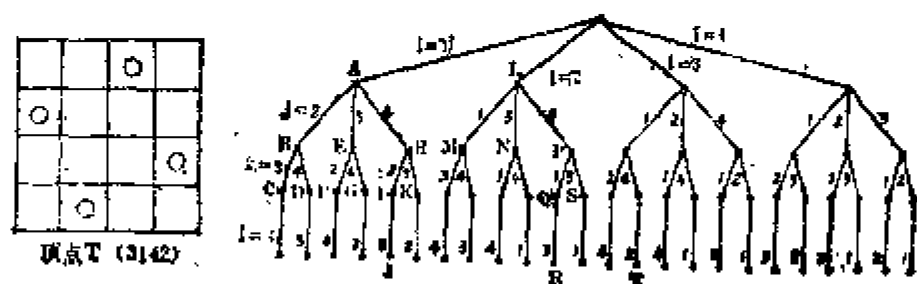


图 3—4

不重路所经过的各边数字依次排列得到。例如顶点E表示状态（13••），顶点T表示状态（3142）等等。有了状态树以后，剩下的问题就是对这24种状态进行判别，也就是对树的24个树叶进行搜索，看哪一种状态还符合最后一个条件"任何两个皇后还不在同一对角线上。"这就要用到"先深搜索法"，每搜索树的一个顶点，用上述条件进行一次判别。在解我们的"四后问题"（"八后问题"也一样）时，还可加入"剪枝"这一手段：当某顶点被判定不符合条件时，则它的子孙也不会符合条件。例顶点B为状态（12••），第一、二的皇后已在同一对角线上，见图3—5（2），则它的两个儿子C（123•）与D（124•），两个孙子（1234）与（1243）都不会符合"任何两个皇后不在同一对角线上"这一条件。因此，顶点B以下的树枝可全部"剪去"，即它的子情况不必再考察。现把对（1•••）与（2•••）的全部子孙进行搜索的过程列表于图3—5中，表下字母对应于图3—4的状态。表中打

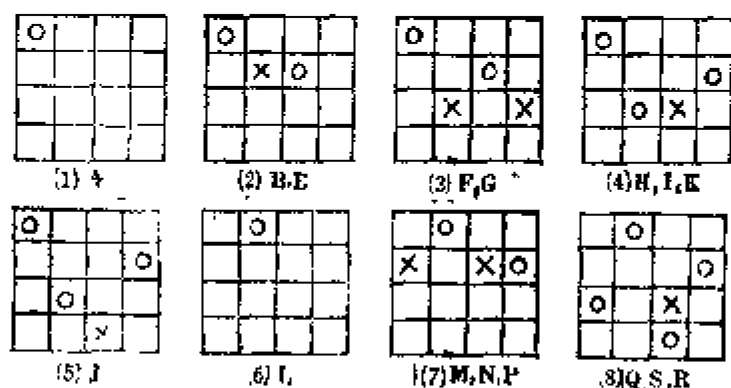


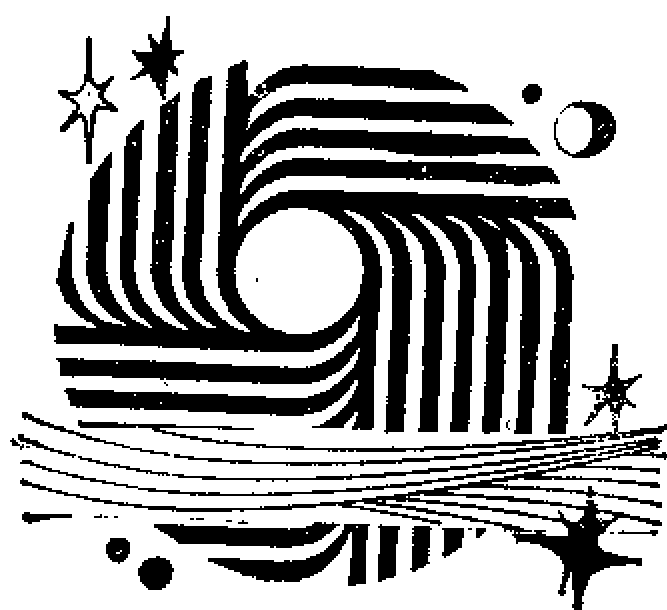
图　3—5

×处，是不能往下放皇后的格子。图3—6表示了对这部分进行“先深搜索”的行进路程，打×处表示“剪枝”。对状态树左边一半搜索，得到一个解为R（2413），见图3—5（8）所示。同样，对树的右边一半搜索，可得另一解T（3142），见图3—4。R与T各自按逆时针方向旋转90°、180°、270°得到仍是本身。R与T是关于主对角线对称的。

图 3—6

亲爱的读者，当你掌握了“先深搜索法”，自己会编制程序（并不复杂），在电子计算机上算出“高斯八后问题”的全部92个解时，你一定会感到由衷的高兴。

狼羊菜渡河——分油问题——最短路



“狼羊菜渡河”这一智力游戏，恐怕很多人在儿时就已知晓：一个人带了一只狼、一只羊、一棵白菜想渡过河去。现在只有一条小船，每次只能载一个人和一件东西。人不在时，狼会吃羊，羊会吃菜。要你想出一种渡河次数最少的方案，把三件东西都安全地带过河去。

“分油问题”我们也一定听说过：现有一个装满8斤油的瓶，另有两个空瓶，分别可装5斤油与3斤油，如何用这三个瓶（倒来倒去）把8斤油平分为两个4斤，而且使倒的次数最少？

还有“最短路问题”：已知一个图上各条街道的长度，要找出一条从甲地到乙地的行走路线来，使得走过的路程最短。

这三个问题初看起来，似乎风马牛不相及，但数学的奥秘正在于此，它的高度抽象性，保证了它的广泛应用性。我们将会看到，当数学的魔杖揭起它们的面纱时，它们原来是那样的相象——它们本是同胎所生的三个孪生的弟兄。

解最短路问题的标号算法

例4.1 图4—1中各边上的数字表示各街道的长度，试找出一条从A到I的最短路

来。

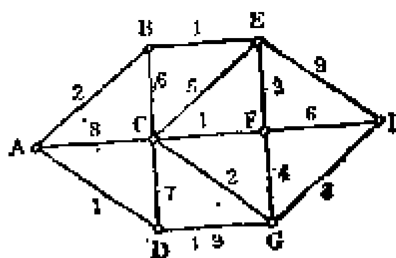


图 4—1

当然我们可以想法凑出答案来。但这不是科学办法。并且，用凑的方法对于比较复杂的图就无能为力了。下面介绍的方法是狄克斯脱拉(Dijkstra)在1959年发现的，叫作标号算法。用这种算法编成程序，可在电子计算机上计算不管多么复杂的图的最短路问题。

标号算法的“标号”有点象公路两旁的里程碑。现在你可以把“标号算法”的过程，想象为给图上每个顶点立一块里程碑的过程。不过在这里，当树碑工作结束时，每一处碑上的数目表示从起点A到该处的**最短里程数**（用方框内的数目表示）。每一个阶段，给未树碑的顶点算出一个里程估计终值，然后给取值最小的一个顶点树碑（这个最小值就是它的最短里程数）。

①每阶段用上一个阶段中刚树碑的那个顶点作为出发点来考虑问题。（开始以起点作为出发点，它的里程数当然应为0。）先给每个未树碑的顶点算出一个里程估计初值：对与出发点邻接（有边相连的两顶点称为邻接）的顶点来说，这个初值等于出发点的里程数加上出发点到该顶点的那条边的长

度；其它不与出发点邻接的顶点，这个初值取一个很大很大的数，例如取所有边上里程数的总和，或更大，用“∞”（无穷大）表示。

②用本阶段得到的里程估计初值与上阶段得到的里程估计终值比较，取较小的那个数作为本阶段的里程估计终值（已树碑的顶点不必算）。第一阶段，此终值就等于里程估计初值。

③在上面的估计终值中求出一个最小的，给那个顶点树碑，它应该是下一阶段计算里程估计初值的出发点。（有多个顶点取到最小值的，任意取定一个）

④记住上述最短里程数是由前些阶段哪个已树碑的顶点的标号值再加上哪条边的长度得到的，把那条边描成粗线，它是最短路要经过的边。

如本例，第一阶段给起点A树碑，最短里程数为[0]。与A邻接的点是B、C、D三点，它们各自的里程估计初值与终值都一样，分别为2，8，1，其它顶点均为∞。最小值是1，顶点D取此最小值给D树碑[1]。第二阶段以D为出发点，与它邻接但未树碑的顶点为C与G，它们的里程估计初值各为：[1]＋9＝10，[1]＋7＝8，而它们在上阶段的里程估计终值各为∞与8，取其小者，得本阶段的里程估计终值分别为10与8。……对照图4－1，标号过程（树碑过程）用下表来表示，其中数字是本阶

段的里程估计终值。七个阶段何时在图4—2的（1）——（7）中画出，图上把里程估计终值写在圆圈里面，以免与边的长度相混淆。

阶段	本阶段出发点	顶点 A	B	C	D	E	F	G	I	最短路上的边
1	A	[0]	2	8	[1]	∞	∞	∞	∞	AD
2	D		[2]	8		∞	∞	10	∞	AB
3	B			8		[3]	∞	10	∞	BE
4	E			8			[6]	10	12	EF
5	F			[7]				10	12	FC
6	C							[9]	12	CG
7	G								[12]	GI或FI

注意，最后阶段，由于I的最短里程数为12，它既等于G的最短里程数加上边GI的长，也等于F的最短里程数加上边FI的长度，若取边GI，则A到I最短路应是沿图4—2（7）的粗线边前进所得，为ABEFCGI；若取边FI，则A到I的最短路应沿图4—2（8）的粗线边前进，为ABEFI。总的路程都是12。（还可取边EI）其实，标号算法不仅算出A到I的最短路，还同时算出了A到其它顶点的最短路。图4—2（7）或（8）的粗线边并不是构成一条路，而是构成原图的一个生成树（称

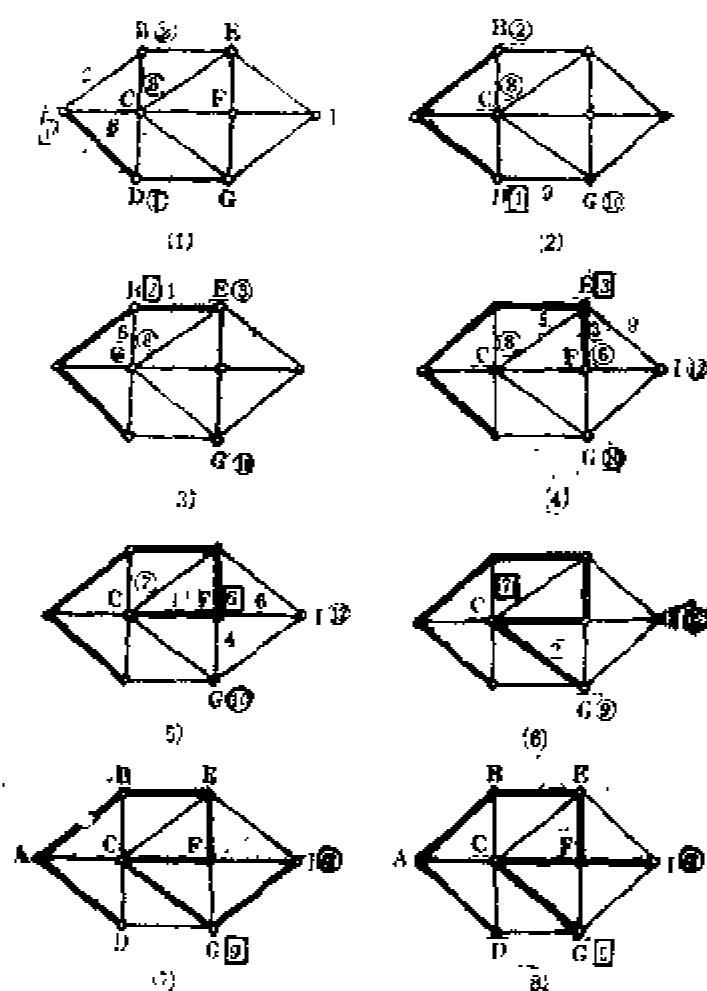


图 4—2

为原图的最短路树形图——不要和原图的最优树混淆，这里（7）碰巧也是原图的最优树，但（8）并不是原图的最优树）。从A到某顶点的最短路，正是这个生成树上从A到该顶点的点不重路（这是唯一的）。例如从A到D的最短路只有一条边AD，而从A到G的最短路为ABEFCG。

狼羊菜渡河问题

现在我们来着手把这个问题化为图的最短路问题。首先必须作一个图，它的顶点是渡河过程中出现的各种情况。为明确起见，假定是从河的西岸渡到河的东岸。先不考虑“人不在时，狼会吃羊、羊会吃菜”这个条件，而只考虑人、狼、羊、菜在河两岸的分布情况。开始时，人与东西都在河西岸，河东岸是空的，我们用

|人、狼、羊、菜|空|

来表示，方框左边是目前在河西岸的东西，右边则是河东岸的东西。这样，所有可能出现的情况有以下16种：

（1）|人、狼、羊、菜|空|　（2）|人、狼、羊|菜|

（3）|人、狼、菜|羊|　（4）|人、羊、菜|狼|

（5）|狼、羊、菜|人|　（6）|人、狼|羊、菜|

（7）|人、菜|狼、羊|　（8）|人、羊|狼、菜|

（9）|羊、菜|人、狼|　（10）|狼、羊|人、菜|

（11）|狼、菜|人、羊|　（12）|羊|人、狼、菜|

（13）狼|人、羊、菜　　（14）菜|人、狼、羊

（15）人|狼、羊、菜　　（16）空|人、狼、羊、菜

当我们考虑了“人不在时，狼会吃羊，羊会吃菜”这一条件时，就会发现上面16种情况中，（5）、（6）、（7）、（9）、（10）、（15）这6种情况是不允许的，例如情况（7），河东岸的狼会吃掉羊。所以可能允许出现的情况只有10种，因此我们所作的图有10个顶点。

若经过一次渡河可以使情况甲变为情况乙，则应在相应的两个顶点间连一条边（由于这时情况乙也可以返回去变为情况甲，所以这里连的是无向边）。这样，我们得到图4—3。我们的渡河方案

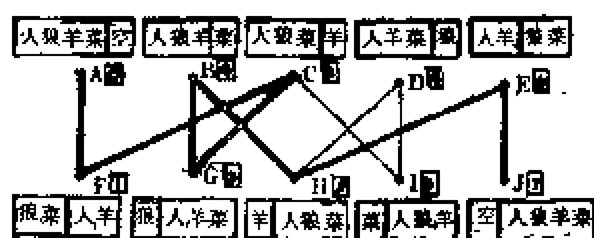


图　4—3

就化为在该图中找一条从顶点A（人狼羊菜|空）到顶点J（空|人狼羊菜）的路。有一条路，就对应一个渡河方案。当我们不但要求渡过河去，还要求渡河的次数最少，那么我们把图的每一条边的长度都看作1，此时路的长度就是路的边数，也就是渡河的次数，因此问题就化为求A到J的最短路问题。我

们对最短路问题已会用标号算法求解，图4—3的各顶点的最短里程数已标在图的各顶点旁。图上用粗线边画出了一条最短路AFCGBHEJ，共渡河7次；另外还有一个渡河方案为AFCIDHEJ，也是渡河7次。原因是你作到第三阶段时，最小的里程估计终值是3，而顶点G与I都取到这个最小值；以后，顶点B与D的最短里程数也都是4。当我们取边BH时得到前一个方案，取边DH时，就得到后一个方案。

分油问题

现在来解用三个瓶子分出两个4斤油的问题。有了解决狼羊菜渡河问题的经验，易知我们应该作一个图，把三个瓶里装油的情况作为图的顶点，用(5，3，0)表示八斤瓶装5斤油、五斤瓶装3斤油，三斤瓶空着这一情况，其它类推。如果情况甲可以经过倒一次油转化为情况乙，则应连一条从顶点甲指向顶点乙的有向边；假如情况乙同时也能经过倒一次油转化为情况甲，则应把两条方向相反但两端相同的有向边合并成为一条无向边。若情况乙不可能转化为情况甲，则只有甲指向乙的有向边。例如(3,2,3)⟹(6,2,0)⟹

（3，2，3），则顶点（3，2，3）与（6，2，0）间有一条无向边。但是，（3，2，3）⟹（5，0，3），而（5，0，3）不可能经一次倒油变为（3，2，3）（从八斤瓶往五斤瓶倒油时，只能把五斤瓶装满，或者把八斤瓶中少于5斤的油全部倒过去），所以有一条从（3，2，3）指向（5，0，3）的有向边。把图的所有可能的顶点按以下方法布置，可以使得到的图比较清楚，而且匀称（参见图4—4）：由于三个瓶中油的总数为8，也就是（a，b，c）这一情况中$a+b+c=8$，因此，定下（b，c）这后两个数，也就定下a，从而确定情况（a，b，c）。而（b，c）可以看作坐标平面上横坐标为b，纵坐标为c的点。由于$b\leqslant 5$，$c\leqslant 3$，所以可能的顶点都在连结A（0，0）、B（5，0）、C（5，3）、D（0，3）这四个坐标点（分别相应于（8，0，0）、（3，5，0）、（0，5，3）、（5，0，3）这四种情况）所成的矩形内。我们再注意到每次倒油，例如从甲瓶往乙瓶倒，必须是或者甲瓶倒空了，或者乙瓶倒满了才算倒完。因此，每倒完一次，三个瓶中必有一个瓶是空的，或有一个瓶是满的。进一步分析可以看到：

①八斤瓶是空的，只有顶点C所代表的情况（0，5，3）；八斤瓶是满的，只有顶点A所代

表的情况（8，0，0）。

②五斤瓶是空的情况，其顶点必在A与D连线上；五斤瓶是满的情况，其顶点必在B与C连线上。

③三斤瓶是空的或满的情况，其顶点必分别在A、B或C、D的连线上。

总之，所有可能的顶点，只在矩形ABCD的四条边上。最后得图4—4。为醒目起见，有向边

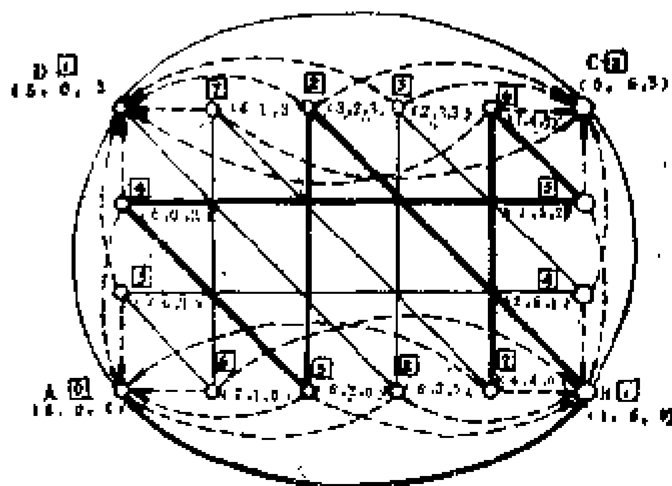


图 4—4

画成虚线。这样，分油问题就变成图4—4中求一条从（8，0，0）到（4，4，0）的最短路。图4—4中有的边是有向边，相当于实际生活中的单行道，只准车辆顺着箭头方向前进，而不准逆着箭头方向前进。因此，前面用于无向图的标号算法要作一点小小的修改，才能在具有有向边的图中使用：当每一阶段选定出发点A以后，凡是箭头指向出发点A的有向边可以从图中擦去。这是因为，一

条从B指向A的有向边，只允许从B出发，沿此边到A，而不准逆行。在本阶段计算里程估计初值时，要求从A出发，而A到B“不能通行”，所以B的初值为∞。此时只有当B在上一阶段的里程估计终值很小时，它才有可能在本阶段结束时，作为树碑的顶点；并且取作最短路上的那条边，一定是在A前面树碑的某个顶点指向B的有向边或无向边。也就是说从B到A的有向边不会被取作最短路上的边。而在以后阶段中，轮到B作为出发点时，由于A已树碑，从B指向A的有向边已不必考虑。所以这种有向边可以擦去。在图4—4中，用标号算法计算几步后，那些画虚线的有向边，可以全部擦去：第一阶段，指向（8，0，0）的六条有向边可以擦去。并且由于顶点（3，5，0）与（5，0，3）的里程估计终值为1，所以它们是第二、三阶段的出发点。这样，指向它们的各六条边紧接着可以擦去。同样由于顶点（0，5，3）的里程估计终值为2，很快轮到它作出发点，最后剩下的六条指向它的有向边也被擦去。所以对图4—4施用标号算法，实际上只要对擦去所有有向边的无向图施用标号算法。其结果——每个顶点的最短里程数已标在图中每个顶点旁，从（8，0，0）到（4，4，0）的最短路由粗线边画出：



(6,2,0) ⟶ (6,0,2) ⟶ (1,5,2) ⟶

(1,4,3) ⟶ (4, 4, 0)读者可以用列表的方法算一下，看看上面的结果对不对。

同类的问题还有："用十斤、七斤、三斤这三个瓶，如何把10斤油平分为两个5斤，并使倒的次数最少？"

这一问题请读者自己试试，找到它的答案。

最短路问题并不是都能找到答案，象以下这个分油问题，就不存在分法："能否用十六斤、十二斤、七斤三个瓶，把16斤油平分为两份？"这个问题可以化为图4—5中，找一条从顶点A（16,0,0）到顶点•（8,8,0）的（最短）路。注意本例与图4—4不同之处仅仅在于十六斤瓶空的情况可以有C（0，12，4）、D（0，11，5）、E（0，10，6）、F（0，9，7）四种，这四个点在一条直线上。我们可以象图4—4一样分析，可知本例的所有可能顶点在五边形ABCFG的五条边上。

图4—5上的有向边已经全部擦去，其理由与解图4—4的最短路时一样。

为醒目起见，图4—5的顶点画为黑点与圆圈两种，边画成虚线、实线两种。当我们用标号法来求它的最短路时，当所有画成圆圈的顶点得到标号（树碑）以后，所有画为黑点的顶点，其里程估计

终值全为∞，无法得到标号，也就是说，无论怎样倒油，不可能倒出黑点所表示的那种情况。因此不

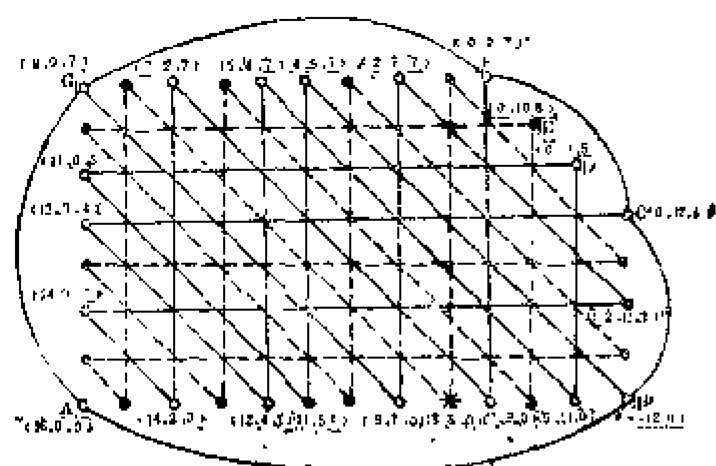


图　4—5

存在从（16，0，0）到（8，8，0）的(最短)路。这就证明了用十六斤、十二斤、七斤三个瓶把16斤油平分为两份的分法是不存在的。

最后要说明的是，不仅仅是上面那些智力测验可以化为最短路问题，重要的是许多实际问题的数学模型是最短路问题。例如，随着印刷电路与集成电路的复杂程度日益增加，必须用求最短路的算法来解决其走线与元件布局问题。

七桥难题——握手定理——一笔画



七桥难题

瑞士的著名数学家欧拉（Euler）在1727年他20岁时，被邀请到俄国彼得堡（现在叫列宁格勒）科学院做研究工作。在那里，他的一位德国朋友向他提出一个曾使许多人困惑的“七桥难题”：

当时普鲁士的哥尼斯堡城（现在是苏联的加里宁格勒）有一个岛，名叫克涅波（见图5—1中A），普雷格尔河的两条支流从它两边流过。有七座桥，把这个岛和三个陆区B、C和D连接起来。要设想一条散步的路径，使得能走过每座桥一次且只一次，并回到出发点。

很多人试验过不少走法，但均未成功。还有比较聪明的人，想出一种系统的试法：先把七座桥从1到7编上号，如果存在一种这样的散步方案，那么把依次走过的桥的号码从左到右写出来就是1—7这七个数字的一个排列（相当于七个人的一种排队方式）。比如他依次走过1号桥、3号桥、5号桥、6号桥、4号桥、2号桥、7号桥，那么写出来的排列就是

1356427。

因此可以先把所有排列写出来：

1234567，1234576，1234657，1234675，……

一共有

$$7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=5040$$

个排列，然后一个一个试（见图5—1）。这种方法比乱试要好，只要有时间，每个试验化费半分钟

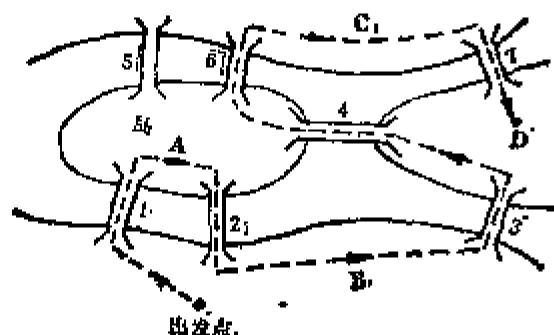


图　5—1

的话，连续42个小时可以试完。但这种方法仍然是很不理想的。假如桥数增加到20座，所有可能的排列个数是个可怕的天文数字：

$$20\times19\times\cdots\times2\times1$$
$$=2\ 432\ 902\ 008\ 176\ 640\ 000$$

即使用一秒钟计算1亿次的电子计算机来试，就算每算一次可试一种方案，不间断地试验，要化760多年时间，你几辈子也试不完。

欧拉的结论

所知既蓄，所见自高，欧拉究竟不愧为大数学家，他不是一个一个去试，而是首先抽去“七桥难题”的表面现象，抓住问题的本质。在这个问题中，陆地与岛屿的大小、桥的长短都无关紧要，重要的是哪座桥连结哪两块地方。因此，他把四块地方各缩成一个点，七座桥变成七条边，得到图5—2所示的图。此时，“七桥难题”化成了“一笔画问题”，即图5—2是否可以不重复地一笔画出来，并且回到出发点。这里所说的“一笔画”是指：笔不准离纸，把图的每条边都画出来，每条边都不许重复，但任何一个顶点是允许多次经过的。这样欧拉在1736年发表了图论方面的第一篇论文：《依据几何位置的解题方法》，宣布“七桥难题”是无法解决的，即不存在这样一种散步方案。

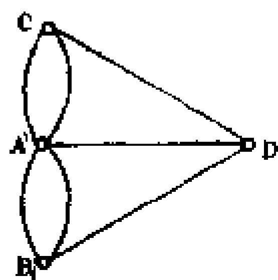


图 5—2

为什么呢？因为假若存在这样的散步方案，就等于图5—2可一笔画出来。而一个图能一笔画且回到出发点的话，对每个顶点来说，从一条边画进

来，必须从另一条边画出去。也就是说，每个顶点连接的边数一定是偶数，即每个顶点的度数都应该是偶数（这样的顶点叫作偶顶点）。而图5—2中，4个顶点的度数全是奇数（称之为奇顶点），所以这是不可能的。

你看，这是多么的机智，多么的巧妙！在这里，我们看到了数学方法所具有的抽象能力和严密推理功能是如何帮助人们超越感性经验，撇掉现实问题中许多无关紧要，但容易障人耳目的表面现象，紧紧把握问题的本质特征的。我们看到数学方法是如何轻而易举地解决了那种单靠日常的自然语言所无法解决的难题的。

亲爱的读者，难道你不想插上数学的翅膀，在科学的蓝天上自由翱翔吗？

一笔画定理

欧拉不仅仅是解决了“七桥难题”，而且给出了判别任何一个图是否可以一笔画的简单易行的准则，我们称它为“一笔画定理”：

（1）a．若一个图能一笔画完，且回到起点，则该图连通，并且所有顶点为偶顶点。

b．反之亦对：假若一个图连通，并且它全

是偶顶点，则可以从任何一点出发，一笔画完这个图，且回到出发点。（这一笔画就是一条包含图中全部边的边不重回路，称为欧拉回路。有欧拉回路的图，称为欧拉图。）

（2）a. 若一个图能一笔画完，但回不到起点，则此图连通，并且除一笔画的起点、终点为奇顶点外，其余均为偶顶点。

b. 反之亦对：但若一个图连通，且仅有两个奇顶点，则可以从其中任一个奇顶点出发，一笔画完这个图，最后画到另一个奇顶点。（这一笔画是一条包含图中全部边的边不重路，称为欧拉路。有欧拉路的图称为半欧拉图。）

因此，一个图当且仅当它连通并最多只有两个奇顶点时，才可以一笔画（包括可以回到出发点与回不到出发点两种情况）。当我们把图5—1中连结A、D的4号桥挪一下位置，让它横跨在C、B之间，这时新的七桥问题就有解了，因为与它对应的图，4个顶点全为偶顶点。如果在A、D之间增建8号桥，那么可以从C出发，一次散步走遍这八座桥，且每座桥只经过一次，最后到达B。可见，问题的本质在于桥的位置，也就是图中顶点之间的二元关系。

一笔画定理是可以严格证明的，有兴趣的读者可以参看姜伯驹先生著的《一笔画与邮递路线》。

握手定理

读者可能要问：一个图要是只有一个奇顶点，是什么情况呢？我们现在来说明，这种情况是不会出现的。任何一个图，不论连通与否，它的奇顶点总个数必定为偶数（零也算偶数——即无奇顶点）。为证明这一结论，必须先有以下结论。

握手定理：任何一个图，各顶点度数的总和等于边数的2倍（因此是个偶数）。

这个定理为何叫握手定理呢？那是因为你若用顶点表示人，两个人在一起握了手，就在两顶点间连一条边，那么某顶点的度数，就是某人的手被握过的次数。握手总是俩个人一起握，或说一对、一对地握手。因此上述定理可形象地表述为："许多人在见面时握了手，则被握过的手的总次数等于握手对数的二倍。"

定理的正确性极易证明。因为每条边在它的两个端点计算度数时，各被计算了一次；正象每次握手，总是两只手握在一起，在计算被握过的手的总次数时，每只手各算了一次；因此各顶点度数总和应等于边数的二倍。

用握手定理即可推出：任何一个图的奇顶点的总个数是个偶数，即奇顶点总是成对出现。这是因为

全部顶点度数总和＝各奇顶点度数总和＋各偶顶点度数总和，

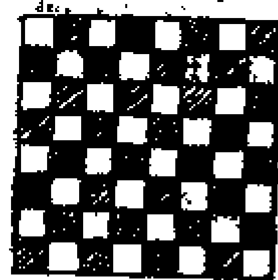
或者是

各奇顶点度数总和＝全部顶点度数总和－各偶顶点度数总和。

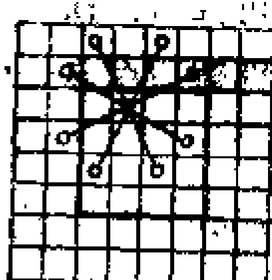
而由握手定理，上式右边第一项（即被减数）是偶数，而作为减数的那一项是一个个偶数相加，无论多少个偶数相加，结果仍为偶数。这样右边是一个偶数减去另一个偶数，所以结果还是偶数。也就是说，左端项“各奇顶点的度数总和”是个偶数。既然如此，又由于每对奇数相加，结果是偶数，倘若奇顶点不是成对出现，那么各奇顶点度数加起来的总和是个奇数，而不是偶数，与上面所说矛盾，所以奇顶点一定成对出现。

例5·1　在8×8的国际象棋盘上，马有多少种不同跳法（从A格跳到B格与从B格跳到A格算是同一种跳动）？参见图5—3（1）。

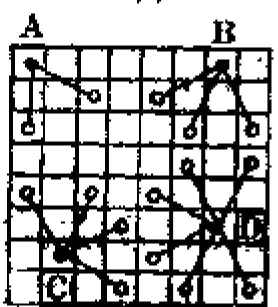
解：作一个图，象棋盘的每一格对应图中一个顶点。一只马能从一个格子经一次跳动跳到另一个格子，则在所对应的两个顶点之间连一条边。这时候，原问题就化作“图中有多少条边？”（这个图



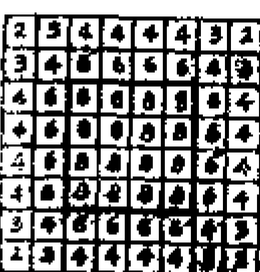
(1)



(2)



(3)



(4)

图　5—3

要真作出来，线条太乱，所以我们并未作出来）根据握手定理，可先计算各顶点的度数（它等于某格子的马有几种跳到其它格子的跳法），然后求出总和再除以2。由图5—3（2）可见，位于中间粗线框中的16个格子，马在其中任何一格里都有8种不同的跳法，也就是说图中有16个顶点度数为8（见图5—3（4））。由图5—3（3）可见，顶点A度数为2，根据对称性，4个角上的顶点度数均为2。顶点B的度数为3，由对称性，相应的8个顶点度数为3。同样C的度数为4，图中共有20个这样的顶点，而紧靠中间粗线框的那些格子，对应的顶点度数为6，就象D一样。所有顶点的度数都写在图5—3（4）的格子中。因此各顶点度数总和为

$$4\times 2+8\times 3+20\times 4+16\times 6+16\times 8$$
$$=336$$

所以图中共有336÷2＝168条边，即马在国际象棋盘上共有168种不同的跳法。

多笔画定理

现在可以来证明以下多笔画定理了，它的证明方法在下一节"中国邮递员问题"中仍有用。

多笔画定理：任何一个有2k个奇顶点，即k对奇顶点的连通图可以k笔画，并且至少要k笔画（$k\geqslant 1$）。

为什么呢？因为我们把这些奇顶点两两分组，可分为k组，每一组人为地添加一条边，连结一对奇顶点。共添加k条边，即可"消灭"全部奇顶点，把原图变成一个无奇顶点的新图。这个新图是欧拉图，它的任何一条欧拉回路应包含刚才人为添加的k条边，把欧拉回路中这k条边删掉，它就断开成为原图的k条边不重路（注意这k条边彼此无公共顶点），也就是k笔画。

例如图5—4，把它的八个奇顶点分为四组：B与K，D与E，L与G，J与I。

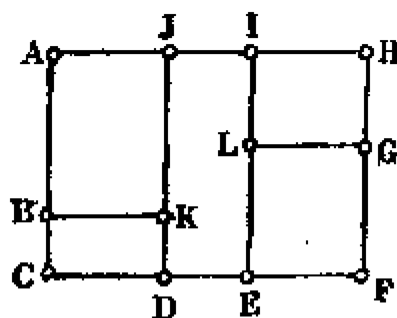


图 5—4

添上四条边（画成圆弧形）后，就成了图5—5（1）。图5—5（2）画出了图5—5的一个一笔

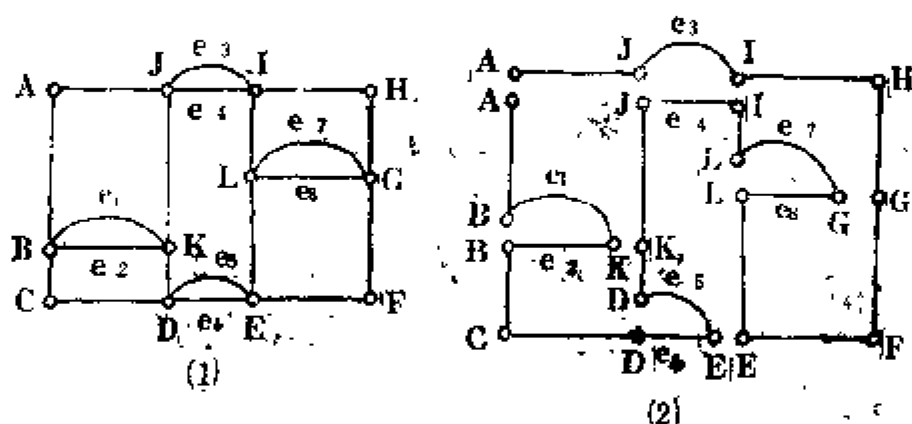


图 5—5

画，把其中人为添加的圆弧边e_1，e_3，e_5，e_7去掉，它断开成为图5—4的四笔画：

BAJ；IHGFEL（e_8）G；LI（e_4）JKD；E（e_6）DCB（e_2）K。

上面是证明了它可以k笔画。能不能用别的办法，少于k笔把图的所有边都画完呢？不可能。假如k－1笔可以画完所有边，即在图中找到k－1条边不重路或边不重回路，它们包含了图的所有边，我们就会推断出原图最多只有k－1对奇顶点的结论，这与已知条件矛盾。实际上，我们注意到，对每条边不重回路来说，它的每个顶点用掉了偶数条边，而对每条边不重路（不是回路）来说，只有出发点与终点用掉了奇数条边。就算这k－1笔画全部不是回路，那么最多只有k－1对（每笔

画的起点与终点）奇顶点。因此有k对奇顶点的连通图不可能k－1笔画完它所有边，当然笔数再少更不可能了。

一笔画的例子

例 5·2 在8×8的国际象棋盘上跳动一只马，要使马完成每一种可能的跳动，并且都恰好一次（与例5·1一样，从A格跳到B格和从B格跳到A格算是同一种跳动），问这是否可能？（参见图5—3）

解：象例5·1一样作一个图，本例的问题就化为该图能否一笔画。马就是一支"画笔"，它跳动一次相当于画下一条边。这个图的各顶点度数已在图5—3（4）中给出，由于它有8个奇顶点（都是3度点），所以不能一笔画（即使不要求回到起点）。也就是说，要马在国际象棋盘上完成每一种可能的跳动，并且都恰好一次是不可能的。

要注意的是，本例与要求"马跳遍每个格子，且每格只跳过一次"是不一样的。本例是要求马"完成每种可能的跳动"，此时马必定要跳遍每个格子，只是跳过某些格子可以不止一次。它化为图论中包含某图全部边的边不重路或边不重回路，它

肯定包含图的全部顶点，但某些顶点可以经过几次。而后者，要求每个格子都跳遍，但只准跳过一次。此时有的跳动可以不完成。它化为图论中包含某图全部顶点的点不重路（或圈），图的有些边可以不经过。

例如图5—6这样的“棋盘”，一只马可以跳遍它的全部15个格子，并且每个格子只经过一次，图上格子中所标数字即马跳动的顺序（从1跳到2，从2跳到3，……等等）。但读者已可自己证明，在这“棋盘”上一只马不可能完成每一种可能的跳动，且都恰好一次。由此可见，这两种问题是不相同的。

10	5	12	1
15	2	9	6
8	11	4	13
3	14	7	

图 5—6

例5·3 给定一个由16条线段构成的图形，见图5—7实线部分。证明：不可能引一条折线，与每一线段都恰好相交一次。该折线可以是不封闭的（即头尾可以不相连）和自身相交的；但折线的顶点不在给定的线段上，而且边也不通过这些线段的公共端点（即图中的“缺口”处）。

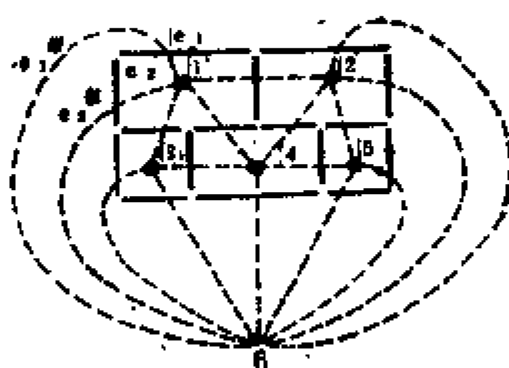


图 5—7

解：这个问题是国外一道智力竞赛题，初看似乎与一笔画没有关系，但它可以化为一笔画问题。我们把16条实线段看作是图G的边，“缺口”认为是它的顶点，则图G的内部有5个区域，外部有一个区域（把16条线段想象成16堵墙，则在它们内部“围出”五块“空地”，外部另有一块“空地”。这“空地”，就是我们所说的“区域”）。我们来作一个新图G^*：在G的每个区域中取定一个点，作为G^*的顶点，图5—7上用数字标出；图G的两块区域有一条公共线段时，则在G^*的对应两顶点间连一条边，且与该公共线段相交一次。例如区域1与6之间有公共线段e_1，则在G^*的顶点1与6之间连一条边e_1^*与e_1相交一次；同样，它们还有公共线段e_2，所以再在G^*的顶点1与6之间连一条边e_2^*与e_2相交一次。这样得到的图G^*（图5—7中以虚线表示）叫作原图G的对偶图。它们有以下关系：

G^*的顶点数＝G的区域数；

G^*的边数＝G的边数。

当G连通时，G^*的对偶图就是G（从图5—7也可看出这一点）。

现在你把G^*的弧形边改画为折线，则可以看到，原问题化为G^*能不能一笔画的问题。由于G^*有四个奇顶点，顶点1、2、4都是5度点，而顶点6为9度点，所以至少要2笔画，不可能一笔

画。这就证明了不可能引一条折线与G的每条边都恰好相交一次。

以上是关于一笔画的一些智力测验题，下面我们给出它在通信理论中的一个重要应用，这个问题称作"电传机问题"或"高效率计算机鼓轮设计问题"。1940年由古德（I·G·Good）用有向欧拉图给予解决，论文在1946年正式发表。

例5·4 图5—8是一个旋转鼓轮，表面分为16段，每段由绝缘体或导体材料制成。绝缘段给出信号0（无电流），导体段给出信号1（有电流）。图5—8中鼓轮所在位置由四个触点按顺时针方向给出读数0010（相当于十进制的2）；把鼓轮顺时针转过一段，读数将是1001（十进制的9）；但再转过两段，读数又是0010。现在要问，这16段哪段绝缘、哪段导通该如何设计，才能使它能够读出16个不同的四位二进制数：

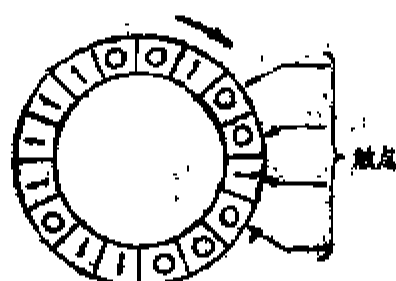


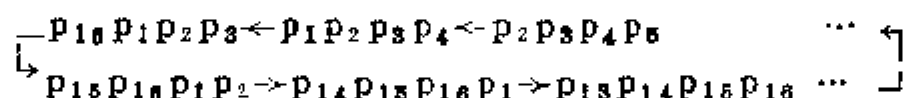
图 5—8

二进制数：0000，0001，0010，0011，
十进制数：　0，　1，　2，　3，
二进制数：0100，0101，0110，0111，
十进制数：　4，　5，　6，　7，
二进制数：1000，1001，1010，1011，
十进制数：　8，　9，　10，　11，

二进制数：1100，1101，1110，1111，

十进制数：　12，　13，　14，　15。

解：鼓轮的16段按顺时针方向依次用p_1、p_2、…p_{16}来表示，每个符号都可以取0或1，它们相继给出的四位二进制数，见图5—9。



$p_{16}p_1p_2p_3 \leftarrow p_1p_2p_3p_4 \leftarrow p_2p_3p_4p_5$ …

$p_{15}p_{16}p_1p_2 \rightarrow p_{14}p_{15}p_{16}p_1 \rightarrow p_{13}p_{14}p_{15}p_{16}$ …

图　5—9

问题就是这16个符号各自究竟取0还是1。古德把它化为图论问题。他把所有三位二进制数（把表示0—7这八个四位二进制数的左边第一位0全去掉，就得八个三位二进制数）作为顶点。边怎么取呢？比如顶点$p_1p_2p_3$，若另一个顶点的后两位数与$p_1p_2p_3$的前两位数p_1p_2相同（这样的顶点只有两个：$0p_1p_2$与$1p_1p_2$），则画一条有向边，从后者指向$p_1p_2p_3$；若另一个顶点的前两位数与$p_1p_2p_3$的后两位数p_2p_3相同（也有两个顶点：p_2p_30与p_2p_31），则画一条有向边，从$p_1p_2p_3$指向后者，见图5—10。有向边是这样用一个四位二进制数表示的：用起点的三位数作它的左边三位数，而用终点的末位数作它的末位数。注意，对顶点$\boxed{000}$（$p_1=p_2$

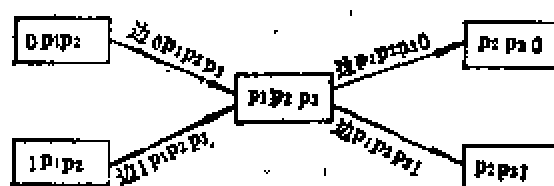


图　5—10

$=p_3=0$）与顶点 1 1 1 （$p_1=p_2=p_3=1$）来说，按图5—10的画法，得到图5—11所示的有向边。其中有从 0 0 0 指向自己的边，及从 1 1 1 指向自己的边，这种边叫自身回路。

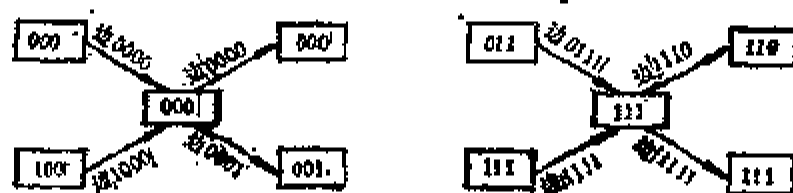


图 5—11

这样可以得到8个顶点，16条有向边的一个有向图，见图5—12。其中每个顶点的入度（箭头指向它的边数）与出度（箭头离开它的边数）都是2。（一条自身回路，入度与出度各算1）——从图5—12看得更清楚。

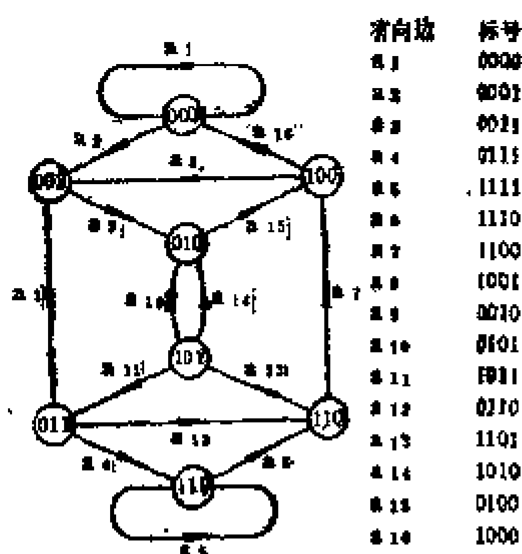


图 5—12

下面来求出图5—12的一条有向的欧拉回路，即包含图的所有有向边恰好各一次的有向回路（从出发点往前走时，走的方向与每条边的指向一致）。可以证明"一个有向图，当且仅当它的每个顶点的入度都等于它

的出度时（不同顶点的入度、出度可以不同），图中存在一条有向欧拉回路”。实际上，一个顶点的入度等于出度时，有几条边画进来，就恰好有同样的边数可以画出去，所以图中有一条有向的欧拉回路。我们在解释无向图的一笔画定理时，已经使用过“画进来”、“画出去”这样的术语，实际上对于有向图才是货真价实的“画进来”——顺有向边方向，从别的顶点画到该顶点；与“画出去”——再从以该顶点为出发点的有向边画到其它顶点。

图5—12各顶点的出度、入度均为2，所以存在一条有向欧拉回路：按图上各边的下标次序画，即$a_1 \to a_2 \to a_3 \to \cdots \to a_{16} \to a_1$就是一条有向“一笔画”。把各边所代表的四位二进制数的末位数（也可以都取第一位数或第二、第三位数）按顺时针方向排成一个圆圈，就可以得到图5—13所示的一种鼓轮设计方案（图上当前状态是以a_{16}的末位数排在最前面，紧接是a_1，a_2，a_3……的末位数）。

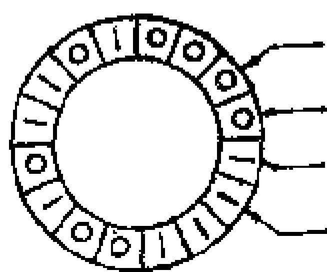
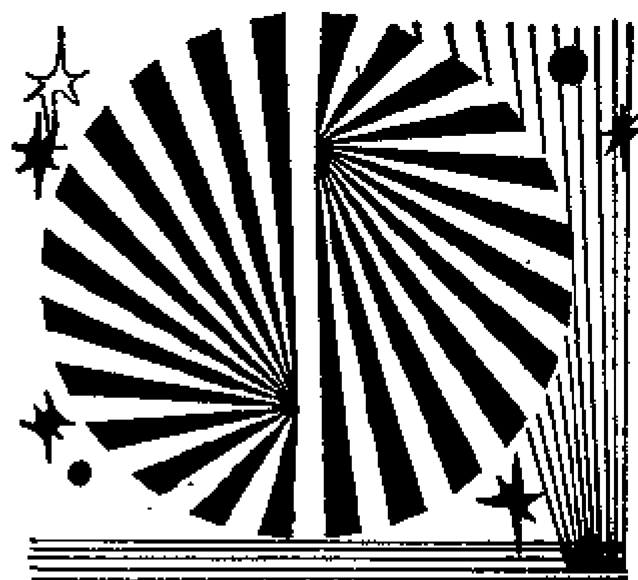


图 5—13

你看，这个问题的解决真有点出奇制胜，数学家的联想能力一点都不比文学家逊色！

中国邮递员问题
——奇偶点图上作业法



中国邮递员问题

我国数学家管梅谷先生，在1960年首先提出了如下问题：

“一个邮递员应该怎样选择一条路线，走遍由他负责的所有街道，回到邮局，而且使走过的路程最短？”

这是炎黄子孙首先提出的问题，所以后来世界各国就把它称为“中国邮递员问题”（The Chinese Postman Problem）。类似的问题还有警察巡逻路线，扫雪车行车路线等等。这是一个十分有用的问短。

我们把邮局、街道的交叉点作为顶点，邮递员所负责的街道作为边，可以得到一个图G。假若图G没有奇顶点，按照一笔画定理，可以从邮局出发，一笔画完所有边（即走遍所有街道，且每条街道只经过一次），回到邮局。由于每条街道只经过一次，而邮递员必须经过每条街道，所以这一笔画就是路程最短的邮递员路线。当G有2k个奇顶点时，例如象图6—1这样的街道图，如何来求它的

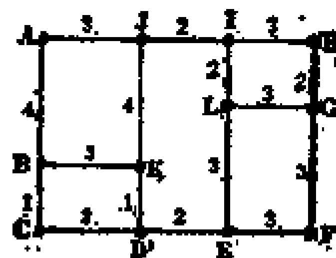


图 6—1（G）

"邮递员路线"呢？邮局是哪个顶点是无关紧要的，不妨就设它在A点。各边上的数字是街道的长度，单位就算是百米吧。"邮递员路线"就是要在图上找一条回路，它应满足两个要求：

①从邮局出发，经过每条边至少一次，回到邮局。

②这条回路的总长度最短。

从一笔画定理知道，这条回路不可能经过每条边都仅仅一次，有的边必须经过不止一次。这里不能象证明多笔画定理一样，在每对奇顶点之间人为添加一条边来解决问题，因为邮递员不能从这条虚构的边上走过去。所以只能在原有的边上再添加同样长度的边（称为重复边）。也就是说，邮递员重复几次走过的街道，在图上应把这条街画成几条边。

这种一般情况的"中国邮递员问题"的第一个解法也正是由它的提出者管梅谷先生给出的，叫作"奇偶点图上作业法"，下面我们来介绍这种方法。

奇偶点图上作业法

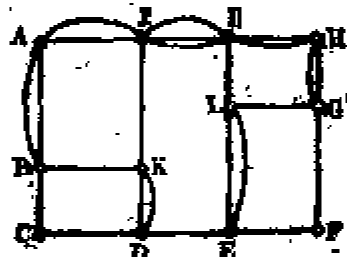
这种方法分两步进行。第一步，先找出一条满足要求①的回路；第二步再把所得回路

逐步修改，使得它的总长度最短。

第一步：把图中的奇顶点（一定成对出现）两两分为一组；在每组的两个奇顶点间找出一条点不重路；把这条路所经过的边添上重复边；这样做可以"消灭"所有奇顶点。例如我们把图6—1的8个奇顶点按以下方法分为四组：

D，K；E，L；J，G；I，B；

（为说明问题，我们才这样分组的）添DK上重复边可消灭奇顶点D与K；添EL上重复边可消灭奇顶点E、L；添点不重路GHIJ上的三条重复边GH、HI、IJ可消灭奇顶点G、J（此时顶点H、I的度数各增加2，仍为偶数）；添重复边IJ（第二条重复边）、JA、AB可消灭奇顶点I、B。得到无奇顶点的图6—2（弧形边为重复边）——记作G_1。它的任何一条从A到A的一笔画（这些一笔画的总长度都一样）就是满足要求①的回路。但它的总长度不见得是最短的。所以我们要有方法来判别它是不是还符合要求②，若不是，要有一定的方法来改进，这就是第二步要作的工作。


图 6—2（G_1）

第二步工作是反复作以下两件事：

（a）先检查G_1中有没有这样的边，它上面所添的重复边数等于或超过2。若有这样的边，则

G_1的一笔画就不是路程最短的邮递员路线。因为我们可以同时去掉偶数条重复边，剩下一条或没有重复边。这样处理后所得的图G_2仍无奇顶点，因为是同时去掉偶数条重复边，该边两端点的度数在G_1中是偶数，此时又同时减少偶数，所以仍然是偶数。但G_2比G_1少了偶数条边，所以G_2的一笔画总长度当然比G_1要小。象图6—2中边IJ有两条重复边，应同时去掉，成为图6—3。

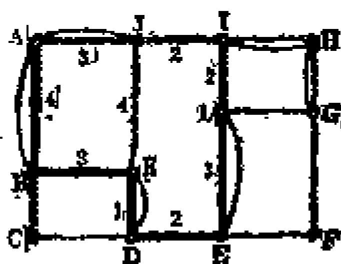


图 6—3（G_2）

(b) 检查原图的每一个圈，若某个圈上重复边的长度总和超过无重复边的长度总和，那么图G_2的一笔画不符合要求②。因为把这个图上的重复边全去掉，而在原来无重复边的地方添上重复边，这样得到的图G_3仍无奇顶点，并且它的一笔画的总长度又减小了。图6—3中粗线边构成原图（图6—1）的一个圈。此圈上，重复边JA、AB、KD、EL的长度总和为

$$3+4+1+3=11,$$

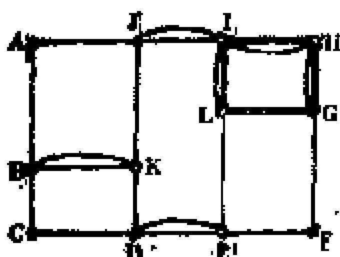


图 6—4（G_3）

而此图上无重复边的IJ、BK、DE、LI的长度总和为

$$2+3+2+2=9,$$

所以应把JA、AB、KD、EL上重复边去掉，而给边IJ、BK、DE、LI添上重复边，成为图6—4。此时已无（a）中所说的边，但仍有（b）中所说的圈。图6—4中粗线边组成的圈，应把它三条重复边去掉，而给LG添上重复边，这时就成了前一节的图5—5（1）。图5—5（1）中再也没有（a）所说的那种边，也没有(b)所说的那种圈（这部分工作量很大，本例的图6—1有22个不同的圈——读者试着找找看）。管梅谷先生证明了，这时得到的图，它的任何一条从邮局出发回到邮局的一笔画，就是路程最短的“邮递员路线”。图5—5（1）的一笔画已在图5—5（2）中画出，它就是符合要求①、②的邮递员路线。当然答案不止一个，但它们的总路程是相同的。

对于只有一对奇顶点的图，当然可用“奇偶点图上作业法”来解。但它有更简单的解法。例如图6—5（1），有两个奇顶点A与C。这种情况可

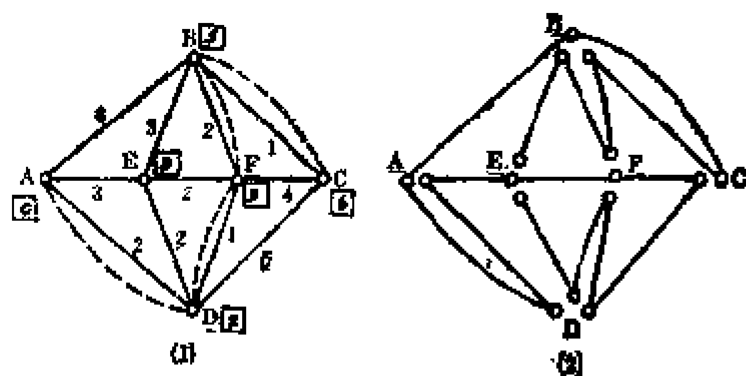


图 6—5

以这样来求解：先求出奇顶点A到奇顶点C的最短路（用标号算法），然后把最短路所经过的边作为重复边加到图G上去（图6－5（1）中画为虚线的弧形边），得到的新图无奇顶点。新图的任何一个一笔画，就是G的“邮递员路线”（见图6－5（2））。你可以检查一下图6－5（1），按上法添重复边后，它没有（a）这样的边，也没有（b）所说的圈。

“奇偶点图上作业法”在检查圈上花费很大的计算量，后来有更加有效的算法。但第一个提出问题、并解决问题的荣誉属于中国人。“中国——中国邮递员问题”，这标志华夏民族聪明才智的光荣的一页已经永远载入图论史册。

环球旅行——哈密尔顿图——货郎担问题





环球旅行

1859年，英国著名的数学家哈密尔顿(Hamilton)发明了一种名叫“环球旅行”的数学游戏，并以25个金币的代价把这种游戏卖给了玩具制造商。(见图7—1(1))它是一

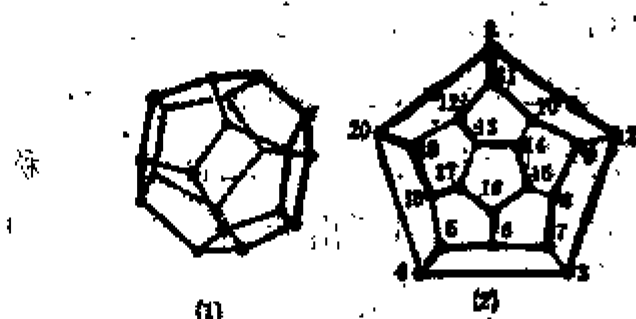


图 7—1

个木刻的实心正12面体，每个面都是正五边形，三面相交于一个顶点，每个顶点写上世界上一个重要城市的名称。这个数学游戏要求沿12面体的边寻找一条路，通过20个城市，作一个环球旅行，并且每个城市只通过一次，最后回到原地。

为了看清楚，我们把这个正12面体看作是橡皮做的，把它的一个面剪开，再拉开铺在一个平面上，就得图7—1(2)。图上外部区域正是剪开的那个面，所以它仍是12个面(区域)，30条边，20个顶点。“环球旅行”问题可以用逻辑代数的方

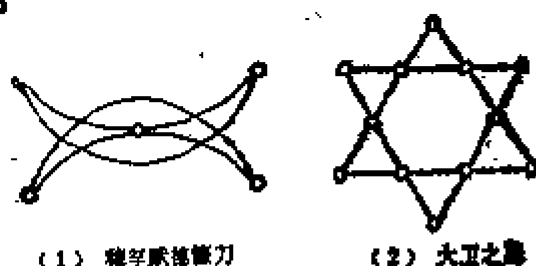
法来解。图7—1（2）上用数字与粗线边标出了一条旅行路线：从城市1开始，经过2、3、……、20，最后回到城市1。

哈密尔顿路与哈密尔顿圈

“环球旅行”游戏显然是图论中的一个问题，它是求一条经过图的每一个顶点，且每个顶点恰好经过一次的回路，这样的回路称为哈密尔顿圈。如果不要求回到出发点，即经过图的每个顶点恰好一次的路，称为哈密尔顿路。一个存在哈密尔顿圈的图称为哈密尔顿图，存在哈密尔顿路的图称为半哈密尔顿图。

哈密尔顿问题与一笔画问题是不同的，第五章中给出图5—6那张残棋盘，“马是否能完成每一种可能的跳动且都恰好一次”是图论中的一笔画问题，而“马是否能跳遍每个格子，且每格只跳过一次”则是哈密尔顿问题。象图7—2（1）的“穆罕默得镰刀”可以一笔画，但它不存在哈密尔顿路；而图7—1（2）是哈密尔顿图，但它不能一笔画，因为它的20个顶点，每个度数都为3，全为奇顶点。图7—2（2）的“大卫之星”既是欧拉图，

也是哈密尔顿图，沿它外部边界行走，就是一条哈密尔顿圈。



（1）穆罕默德弯刀　　（2）大卫之星

图 7—2

什么样的图可以一笔画的问题，解决得非常彻底：凡满足“奇顶点个数不超过2个”这个条件的图，一定可以一笔画；反过来也对，即凡能一笔画的图必定符合“奇顶点个数不超过2个”这个条件。这样的条件在数学中称为充分必要条件。遗憾的是，自从“环球旅行”游戏提出至今，数学家们经过近百年的努力，仍未找到（半）哈密尔顿图的充分必要条件。有关的结论，要末只是充分条件，即符合条件一定是（半）哈密尔顿图，但反过来未必正确；要末只是必要条件，即（半）哈密尔顿图一定具备这个条件，但反过来无法成立。例如1952年，有人证明了一个定理：

“若G是一个简单无向图，其顶点数$n \geq 3$，若每个顶点的度数$\geq \frac{n}{2}$，则G一定有哈密尔顿圈。”

例7·1 任何一个顶点数$n \geq 3$的完全图K_n一定存在哈密尔顿圈。这是因为它每个顶点的度数是

$n-1$，一定大于或等于$\frac{n}{2}$，符合上述定理的条件。实际上，我们只要给图的顶点任意排一个次序，由于完全图的任何两个顶点都有一条边，所以依次从顶点1到顶点2、3、……最后回到顶点1的圈，就是哈密尔顿圈。

但是，我们可以看到，象“大卫之星”、“环球旅行”这两个图，虽存在哈密尔顿圈，却并不符合定理的条件“每个顶点的度数$\geq\frac{n}{2}$”，所以这个条件只是充分条件而不是必要条件。还有一种条件，它只是必要条件，并不是充分条件。这种条件的用处是作否定判断：凡不符合这种必要条件的图可立即断定它没有哈密尔顿路（圈）。例如有以下这样的定理：

“若G是一个哈密尔顿图（或半哈密尔顿图），则任取G的k个顶点，在G中删去这些顶点及与它们相连的所有边，那么剩下的图的连通分支一定不超过k（不超过k+1）。”

若我们在图G中找到某k个顶点，删去这些顶点及与其相连的边后，剩下的图的连通分支超过k（或k+1）时，即可断言图G无哈密尔顿圈（路）。

例7·2 在4×4的黑白方格棋盘上（见图7—3（1）），从任一个方格开始，跳动一只马，

使其通过棋盘的每一个方格一次，而且仅仅一次，问是否可能。

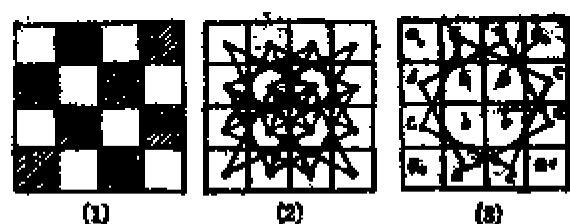


图 7—3

解：作一个图，以棋盘的每个方格对应图的一个顶点；马若能从方格A跳到方格B，则在对应的两个顶点间连一条边，这样得到图7—3（2），问题也就化为此图是否存在哈密尔顿路。我们把度数为2的四个顶点（位于四个角上）记为a，与a有边相连的中间四个顶点记为b，删去这四个记为b的顶点及与其相连的所有边，得到图7—3（3）。如果我们把图7—3（1）的中间四个方格想象成“陷坑”，马不能往里跳时，可直接得到图7—3（3）。它有4个孤立点a，两个回路（分别连结4个c点与4个d点）所以它有6个连通分支。$6>4+1$，因此图7—3（2）不存在哈密尔顿路，也就是在4×4棋盘上跳动一只马，要通过每个方格恰好一次是不可能的。

正如我们预先声明的那样，上面这个定理的条件即使满足，仍无法断定图中存在哈密尔顿圈(路)。图7—4叫珀特森图（Pertersen），它符合“去

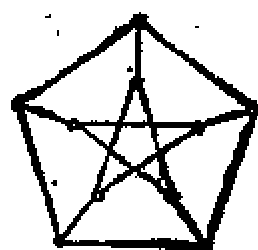


图 7—4 Pertersen图

掉图中任意k个顶点及与其相连的所有边后，剩下的图的连通分支数≤k”，但它并不存在哈密尔顿圈。（它只存在哈密尔顿路）。

货郎担问题

货郎担问题，也叫旅行售货商或旅行推销员问题（Traveling Salesman Problem，缩写为TSP）：一个货郎，要去n个村子卖货，假定任何两个村子间均直接有路可通，怎样安排一条路线，使这个货郎从某村出发，各个村子恰好通过一次，回到出发处，并使走过的路程最短。

当我们以顶点代表村子，两村间直接有路可通时，在对应的两顶点间连一条边，则可以得到n个顶点的完全图K_n。问题化为在K_n中求一条边长之和最小的哈密尔顿圈。由例7·1，我们已经知通，任意给这些村子指定一个次序，依次走过这些村子时，就可得到一条哈密尔顿圈。因此每一条哈密尔顿圈相当于n个人的一种排队方法。这样的排队方法一共有

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

种。当n＝20时，（我们在“七桥难题”中，已经看到）这是一个连当今最快的计算机几辈子也算不完的天文数字。所以不能采用把全部哈密尔顿圈全部列出来，一个个比较，从中得出路程最短的哈密尔顿圈的方法。

遗憾的是，货郎担问题至今仍是图论中的难题，没有一个好的算法。许多方法只能求出它较好的解，但无法保证可求出最好的解（即路程最短）。下面介绍的一个方法就是这样，它称为“最邻近法。”

例7·3　在图7—5所示的完全图K_5中，求一条货郎担路线。（各边上的数字为该边长度）

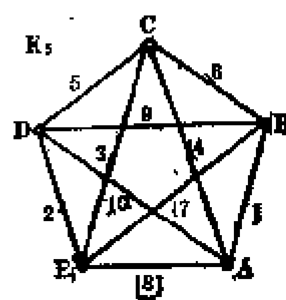


图　7—5

最邻近法的步骤是：先任选一个顶点，比如说A，然后在与A相连的边中选一条最短的边，本例为AB边。A经此边到达另一个顶点B，然后在与顶点B相连的、但还未用过的边中选一条最短的边，本例为BC边。如此继续，只是以后每次所选的新边，除最后一次回到出发点外，不能与已走过的顶点相连。这样可找到一条哈密尔顿圈，本例是

ABCEDA

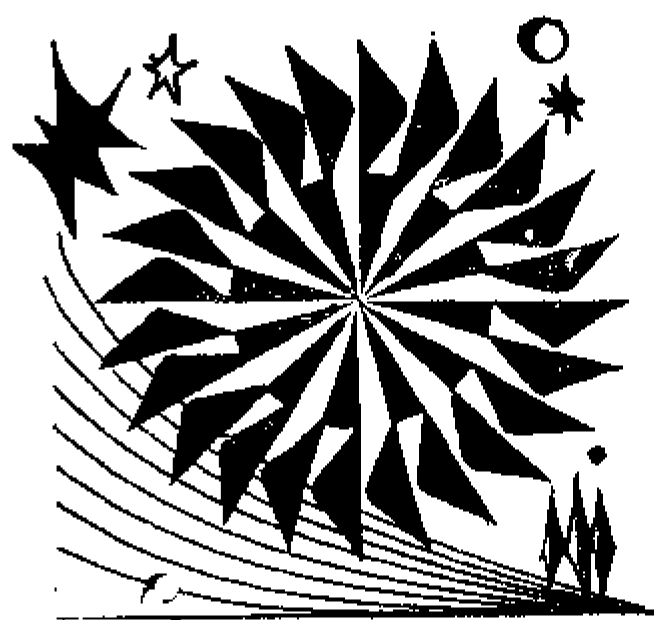
它的边长总和为

$$1+6+3+2+10=22,$$

但它并不是路程最短的。这是因为，虽然开始时，你在某种意义上选了“最短”的边，但越往后，你的选择余地越小，象本例最后一步只能从D到A，无别的选择，而边DA恰恰是图中最长的边。所以这种算法的好坏与第一个顶点选哪一个有关。有一种改进的方法是：多选几个顶点作第一个顶点，用“最邻近法”各算一次，再比较各次计算的结果，从其中挑出最好的结果（当然不见得是所有哈密尔顿圈中路程最短的结果）。本例中除A以外无论选哪个点作为第一个顶点，得到的哈密尔顿圈的总路程都是19。

工作分派问题

——匹配——婚姻定理



工作分派问题与匹配

例1·4就是一个工作分派问题。要注意的是，它与日常生活中的分配任务不尽相同。这里的工作分派，要求不同的工作必须由不同的人来干，不需要某人“勇挑重担”，一人干几件工作；还要求不同的人干不同的工作，不需要几个人“精诚合作”，同干一件工作。例1·4的答案，已在图1—4中用四条粗线边画出。这四条边在一起称为图1—4的一个匹配。其中的三条边、两条边，甚至一条边也叫一个匹配。

为什么把一些边叫作“匹配”呢？因为这些边的作用是把图的一些顶点“配成对”。在工作分派问题上，就是让不同的人与不同的工作“配对”。严格地说，图中一些边，若其中任何两条边都没有公共端点，则称这些边为该图的一个匹配。图中任何一条边，都是图的一个匹配。

在工作分派问题上，我们希望每个人都有一项不同的工作干，而且每一项工作都有不同的人干。这样一种完美的分派方案，在图论中称为完美匹配。一个匹配中所有边的端点（相当于已经配好对的人与工作）称为被匹配盖住了（相当于“分派好

了”）。所以，完美匹配就是把图的全部顶点都盖住了的匹配。图1—4的四条粗线边，就是一个完美匹配。

并不是每个图都有完美匹配。例如在图1—4中增加一门课，但不增加教师，那么无论甲、乙、丙、丁四位教师，能否教这门课，这个图都不存在完美匹配。因为课程数超过了教师数，要使所有课程都有不同教师来教是不可能的。同样，光增加一个教师，而不增加课程，“僧多粥少”，也不存在完美匹配。

一个图不存在完美匹配时，我们可以退一步考虑这样的问题：怎样使尽可能多的人有（不同的）工作干，或尽可能多的工作有（不同的）人干？这在图论中叫作最大匹配问题。所谓最大匹配，就是图中边数最多的匹配。

最大匹配与完美匹配有密切联系。一个完美匹配一定是最大匹配；反之，虽然一个最大匹配未必是完美匹配，但当一个图的最大匹配一经求出，只要看它是不是把所有顶点都盖住了，如果是，它就是一个完美匹配，如果不是，则可断言图中不存在完美匹配。

最大匹配与完美匹配的例子

例8·1（驾驶员搭配问题）第二次世界大战期间，许多沦陷区国家的飞行员到英国皇家空军服役。皇家空军某飞行队有10个来自不同国家的驾驶员，他们都会驾驶某种飞机。 架飞机都要配备在航行技能与语言上能互相配合的两名驾驶员，问：应该怎样安排，才能使起飞的飞机最多？

解：作一个图，每个顶点对应一个驾驶员，两个驾驶员能在一起配合飞行的，则在对应的两顶点间连一条边，见图8—1。问题化为求图中的最大匹配。图中的粗线边，就是一个最大匹配，该图没有完美匹配。

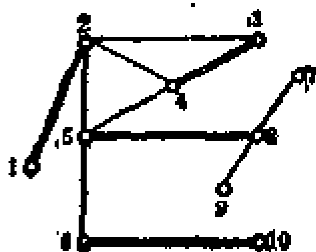


图 8—1

例8·2（循环赛日程安排问题）有6个选手（偶数个）参加循环赛，怎样来安排比赛日程？

解：作一张5×5的表格（表格的行数与列数均比选手数少1），见图8—2。表顶数字表示2—6号选手的号码（缺1号选手），左侧写上比赛日

期。

日期＼选手号	2	3	4	5	6
1	2	6	5	4	3
2	4	3	2	6	5
3	6	5	4	3	2
4	3	2	6	5	4
5	5	4	3	2	6

图 8—2

把2、3、4、5、6这五个数按顺时针排成一个圆圈，见图8—3（1），这圆圈从某处断开以后，按逆时针方向排列这五个数，称为这几个数的一个循环递减排列，见图8—3（2）

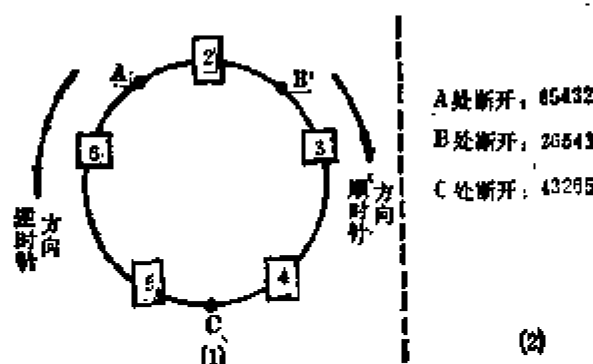


图 8—3

图8—2所示的表格中的数字是这样填写的：

①每一行是2、3、4、5、6这五个数的一个循环递减排列。

②每行第一个数是这样得来。先用行号乘2，当结果不超过选手数，就等于这个数；超过选手数时，用选手数去除，所得余数再加1。比如说，选手数是100，那么这个表的第1列数依次是2、4、6、8、…、100，然后是3、5、7、9、…、99。

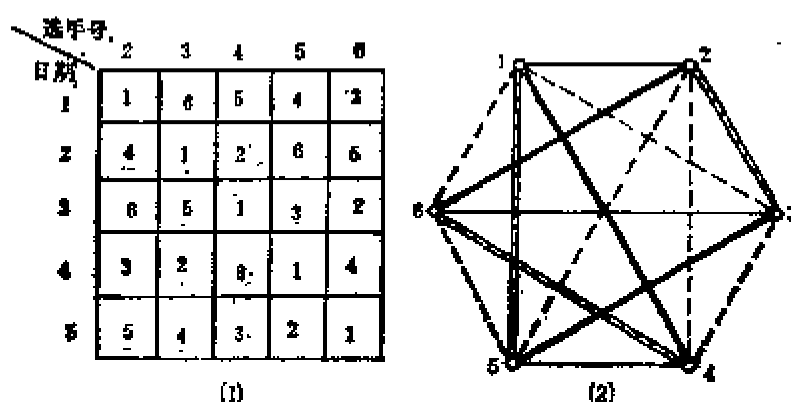
最后把表中对角线上的黑体数字全部改为1，就得到比赛日程安排表，见图8—4（1）。表中某行的数字表示某天第几号选手与顶格上对应的某号选手比赛，例如

第1行　1 6 5 4 3

　　　↕ ↕ ↕

顶　格　2 3 4 5 6

表示第一天，1号选手与2号选手对阵，6号与3号、5号与4号比赛。



日期＼选手号	2	3	4	5	6
1	1	6	5	4	3
2	4	1	2	6	5
3	6	5	1	3	2
4	3	2	6	1	4
5	5	4	3	2	1

(1)　(2)

图　8—4

读者可能要问，这与“匹配”有何关系？实际上，求偶数个选手的比赛日程安排，就是求一个完全图（顶点数等于选手数）中彼此都不相交的全部完美匹配（两个完美匹配没有一条相同的边，称为不相交）。如本例，我们作完全图K_6，见图8—4（2），每个顶点代表1个选手，同一天中三对选手之间画以同一形状的边。我们可以看到K_6的15条边（对应15场比赛）正好被分解为五个（对应比

赛日期数）彼此不相交的完美匹配。

当选手数是奇数时，怎么安排比赛日程呢？比如说5个选手，这时我们增设一个虚构的第6号选手，把选手数变为偶数6，然后按6个选手作出安排。最后只要注意，谁与第6号选手比赛，实际上表示轮空。

这里虚设一个选手使选手数从奇数变为偶数，与在证明多笔画定理时，人为增添一些边，从而消灭奇顶点的作法有异曲同工之妙，都体现了数学中利用某种变换把未知情况化为已知情况来解题的思想方法。

如何判别完美匹配的存在

任何一个图，只要有一条边，由于总边数有限，它必定存在最大匹配。但是，它未必有完美匹配。如何来判别一个图有没有完美匹配呢？对于有些图，我们很容易断言它不存在完美匹配。

我们知道，完美匹配作为"匹配"来说，任何两条边的端点彼此不同，因此被它盖住的顶点是匹配边数的2倍，是个偶数。它同时还是"完美"的，即它盖住了图的全部顶点。因此存在完美匹配

的图，其顶点必然是偶数个。当一个图的顶点数为奇数时，立刻可断定它没有完美匹配。

一个（顶点划分为X与Y的）二部图的完美匹配又有它的特殊之处，它的边必定是一端在X，而另一端在Y。所以，只要X与Y的顶点数不相等，那么立即可断言这个二部图不存在完美匹配。

例8・3（剪去角的棋盘问题）把一个国际象棋盘剪去相对的两个角后剩下62个方格，见图8—5。问能不能用31张长等于2个小方格边长、宽为1个小方格边长的矩形纸片，把这残棋盘全部盖住，当然不允许把纸片剪断后去盖。

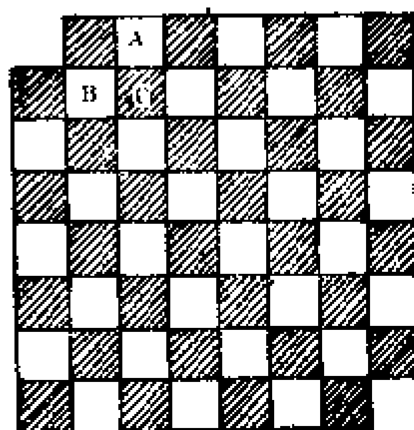


图 8—5

解：作一个有62个顶点的图，每个顶点对应一个小方格。两个小方格相邻时（有公共边的两个小方格称为相邻，如图8—5中，A与C、B与C为相邻，但仅有公共点的两个小方格，如A

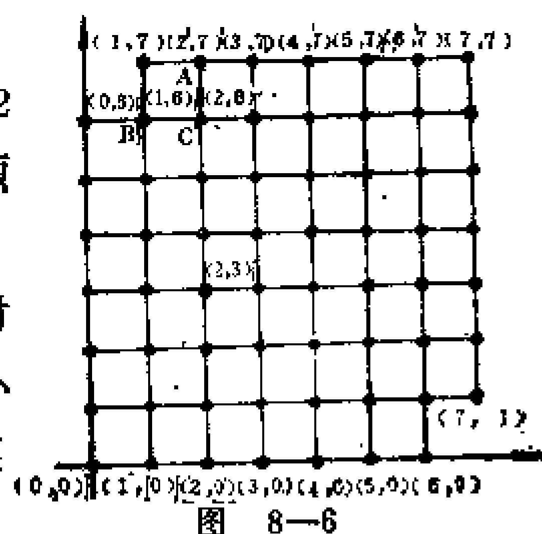


图 8—6

与B不算相邻），在相应的两顶点间连一条边。这样就得到图8—6。一张矩形小纸片盖住图8—5两个小方格，相当于图8—6中一条边把两个顶点配成对。例如小纸片盖住A、C两个小方格，相当于图8—6中AC边把顶点A与C配成对。因此原问题化为图8—6中有无完美匹配。

首先我们来说明图8—6是个二部图。我们把图放到平面直角坐标系上去，然后就可把顶点分为两部分：X与Y，一个顶点的两个坐标和等于奇数的，归入X，而两个坐标和为偶数的，归入Y。例如顶点A、B，它们归入X，而顶点C归入Y。这样分类后，可清楚地看到，X和Y的顶点，无论上下左右都是间隔排列的，同属X或同属Y的任何两顶点之间无边相连，因此这是二部图。但当你计算一下属于X与Y的顶点各有多少时，你会发现：X有30个顶点，而Y有32个顶点，所以图8—6不存在完美匹配。也就是说，用31张小纸片盖住残棋盘是不可能的。

你看，这个问题如果用试验的办法，是无法说清楚的，但化为图论问题后，轻易就解决了。当然，你也许在别的什么杂志上见到过它的“另外”解法。那就是象图8—5那样，把残棋盘的小方格涂成黑白相间的颜色。每一张小纸片盖住的两个格子，一定是一黑一白。所以若可用31张小纸片盖住

整个残棋盘的62个小方格，那么这62个小方格一定是31个白的，31个黑的。但剪去的两个小方格都是白的，因此残棋盘中只有30个白格子，而有32个黑格子，所以用31张小纸片把62个小方格都盖住是不可能的。“这里并没用什么图论知识呀！”你也许会这样想。但实际上，这种证明方法的本质与二部图的证法是完全一样的。把小方格涂成黑白相间的颜色，不就是把图的顶点分成X与Y两部分吗？一张小纸片盖住一白一黑两个小方格，不就是一条边把X中一个顶点与Y中一个顶点“配成对”吗？只不过你不自觉地使用了“匹配”这个概念罢了。

上面这个例子是说明如何来判定一个图不存在完美匹配。那么如何来判定一个图有完美匹配呢？方法是先求出最大匹配，然后根据它是否盖住了图的全部顶点来判定。求一般图的最大匹配，方法比较复杂。下面我们简单叙述一下求二部图的最大匹配的方法。

如何求二部图的最大匹配

求二部图的最大匹配的方法叫作“匈牙利算法”，它主要用到一个“可扩充路”的概

念。当已知图中一个匹配M时，关于M的一条可扩充路是图中这样一条路：

①它是一条点不重路；

②它的起点与终点都未被匹配M盖住；

③它的边交错地一条属于M，一条不属于M。

根据②、③，关于M的可扩充路，它的起点未被M盖住，所以第一条边不属于M，第二条边属于M，第三条边又不属于M，……由于终点也未被M盖住，所以最后一条边不属于M。这样，可扩充路上不属于M的边比属于M的边多一条，总的边数是奇数。注意，仅仅一条边，它连接两个未盖点，也算一条可扩充路。对于二部图来说，由于任何一条边的两端点分属于X和Y，所以可扩充路的起点和终点也一定分属于X和Y。例如图8—7所示二部图，取一个匹配为两条粗线边：$M=\{x_2y_2, x_3y_3\}$，则

$p_1=\{y_1x_2y_2x_3y_3x_4\}$

就是一条关于M的可扩充路。

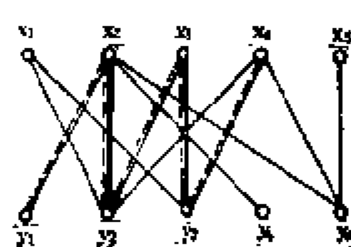


图 8—7 (图中虚线所示)

$p_2=\{x_1y_3x_3y_2x_2y_1\}$，$p_3=\{x_1y_2x_2y_4\}$，$p_4=\{x_5y_5\}$ 也是关于M的可扩充路。

"匈牙利算法"求最大匹配的基本思想是"逐步调整"，这是电子计算机求解的一种基本方法。先任取一个初始匹配M_1（例如任取一条边），然

后检查有无未盖住的顶点及关于M_1的可扩充路。若有，就把M_1调整为另一个比它多一条边的匹配M_2：放弃可扩充路上原属于M_1的边，加入可扩充路上原不属于M_1的边，不在可扩充路上的边仍保留下来。（这样调整后之所以仍为匹配，是因为可扩充路的起、终点为未盖住点，且它的边交错地属于M_1与不属于M_1。而之所以多出一条边，是因为关于M_1的可扩充路，不属于M_1的边比属于M_1的边多一条。）接着对新的匹配M_2检查未盖点及关于M_2的可扩充路……，如此继续，由于图的顶点与边数有限，进行到某一步以后，会出现以下情况之一：

①所有顶点全被盖住；

②虽然仍有顶点未被盖住，但已找不到可扩充路。

这时可证明，无论哪种情况，这时得到的匹配已是图的最大匹配，情况①还是完美匹配。

例8·4。求图8—7的最大匹配。

解：取初始匹配$M_1=\{x_2y_2, x_3y_3\}$及关于它的可扩充路$p_1=\{y_1x_2y_2x_3y_3x_4\}$（图8—7中的粗线边与虚线路）。

第一次调整：把p_1中原属于M_1的边x_2y_2与x_3y_3放弃，加入p_1中原不属于M_1的边x_2y_1，x_3y_2，x_4y_3，得到新的匹配，记为$M_2=\{x_2y_1, x_3y_2,$

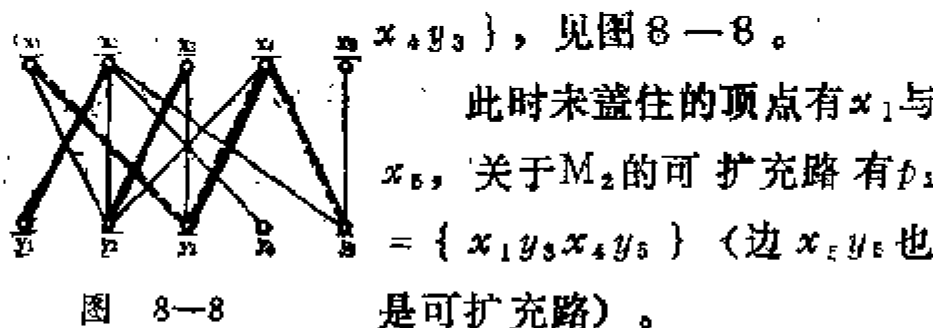


图 8—8

x_4y_3 }，见图8—8。

此时未盖住的顶点有x_1与x_5，关于M_2的可扩充路有p_2＝{$x_1y_3x_4y_5$}（边x_5y_5也是可扩充路）。

第二次调整：把p_2中原属于M_2的边x_4y_3放弃，加入p_2中原不属于M_2的边x_1y_3与x_4y_5，（边x_2y_1与x_3y_2保留）得匹配M_3＝{x_1y_3，x_2y_1，x_3y_2，x_4y_5}，见图8—9。



图 8—9

此时未被盖住的顶点有x_5与y_4，但已找不到以它们为起点或终点的可扩充路。所以，M_3就是图8—7的最大匹配，并可判定图8—7无完美匹配。

在“匈牙利算法”中，关键之处在于寻找可扩充路。我们在上面解题时，可扩充路实际上是“看出来”的，也就是“凑出来”的。究竟如何求扩充路，有兴趣的读者，可参看管梅谷先生著的《有趣的图论》或有关的图论书。

霍尔定理与婚姻定理

我们已经知道，任何一个图不一定存在完美匹配，但必存在最大匹配。对于二部图还

可以考虑这样的问题：能不能找到一个匹配，使得X的顶点全部被它盖住。这叫作X可以在Y上配对，这个匹配一定是最大匹配，假如Y的顶点数等于X的顶点数，那么它又是完美匹配，因为此时Y的顶点也全部被盖住了。对于工作分派问题来说，也就是每个人都有不同的工作做。当X中每个人都能分派到不同工作做时，其中任何一部分人当然也分派到不同工作做，由于某人已分派到的工作必是他胜任的工作，因此X中任何一部分人能胜任的工作项数一定不少于这部分人的人数（至少是等于）。换句话说，对X中任何一部人来说，都不会出现“僧多粥少”的情况。用图论的术语来说就是，一个二部图若X可以在Y上配对，那么X中任何一部分顶点的邻接点（都在Y中）个数一定不小于X中这部分顶点的个数。有趣的是，反过来也成立。这就是1935年霍尔（Hall）所发现并证明的结论。

霍尔定理：一个顶点分为X与Y两部分的二部图，X可以在Y上配对的充分必要条件是X中任何一部分顶点的邻接点个数不小于X中这部分顶点的个数。

注意，定理中“X中任何一部分顶点”包括“X的全部顶点”这一情况。所以，此时Y的顶点个数一定不小于X的顶点个数。定理中的条件，有时叫作“多样性条件”。

例8·5　下面是一道国外数学竞赛题：有50张纸，每张纸的正反面各写上1，2，3，…，50中一个数字。证明：如果全部写好以后，每个数字都恰好出现二次（同一个数字可以出现在同一张纸的正反面），那么这些纸片一定可以这样摊开，使得朝上的面中1，2，3，…，50都出现。

解：为叙述简单，我们把问题从“50张纸”改为“6张纸”，数字也改为1，2，3，4，5，6这6个数。若6张纸的正反面写的数字如图8—10所示，圆圈里的数字表示纸的编号，上面表示纸的正面。

①	②	③	④	⑤	⑥
3	5	1	1	4	2
3	4	6	2	5	6

图　8—10

我们来作一个二部图，每张纸用X的一个顶点表示，每个数字用Y的一个顶点表示。某张纸上写有某个数字（不论正反面），则在代表这张纸的顶点与代表这个数字的顶点之间连一条边。这样就得

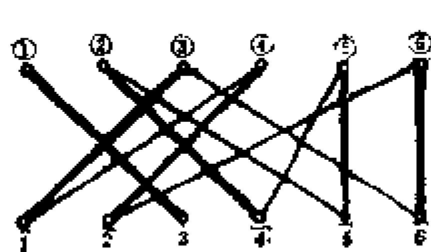


图 8—11

到图8—11。由于每张纸片正反面或写有同一个数字（例纸片①）或写有两个不同数字，且每个数字恰好出现两次，所以，若

X中任一部分顶点，当其顶点个数为s时，即任取s张纸片时，在这些纸片中，至少要出现s个不同数字（假如出现的不同数字少于s个，则表明，至少有一个数字要出现3次，与已知条件不符合）——比如取①、②、⑤三张纸片，其中出现的不同的数字为3、4、5，正好是3个（因为这三个数字恰好各出现二次）——也就是说，这部分顶点的邻接点个数不少于s个，满足霍尔定理的多样性条件，从而X可以在Y上配对，也就是说每张纸片可以对应一个不同数字（匹配各边的端点彼此不同）。图8—11中以粗线边表示其中一个这样的配对。在此匹配中，某号纸片与某个数字配对，则把这张纸片的这个数字朝上摊开（图8—10中有关数字的左侧表示），就是问题的一个答案。50张的问题也依法按霍尔定理证明。

上述数学竞赛题属于"相异代表系"问题，它的一般提法为，有n个人，每个人都可以参加m个学术团体中的某几个团体，现在要在这n个人中选出m个人作代表，每人代表一个不同的团体，问是否可能。我们作一个二部图，X有m个顶点，代表m个团体，Y有n个顶点代表n个人；某人属于某团体，则在相应两顶点间连一条边。"相异代表系"问题就化为这个二部图中，X是否可以在Y上配对。据霍尔定理，当且仅当这m个学术团体中任何一部分

团体，它们所包含的人数不小于团体个数时，可以选出相异代表。

霍尔定理有一个推论，用它可以立即断定一种特殊的二部图存在完美匹配，而不必用匈牙利算法进行计算后再判别了，它就是下面的婚姻定理。

婚姻定理：如果一个简单二部图，它所有顶点度数都一样是$k>0$，那么它一定有完美匹配。

从定理的条件，首先可以推出X与Y两部分顶点数相等。这是因为，二部图的一条边一定是一端在X，另一端在Y。所以

X中顶点的总度数＝总边数＝Y中顶点的总度数；

现在由于每个顶点的度数都是k，所以有

$k\times$X顶点个数$=k\times$Y顶点个数；从而两部分顶点个数相等。其次可验证，这个二部图符合霍尔定理的多样性条件（这里不再赘述），因此X可可以在Y上配对，但已证明Y的顶点数等于X的顶点数，所以这个匹配也就是一个完美匹配。

这个定理为什么叫它“婚姻定理”呢？那是因为它可以形象化地表述为：

“假如一个村子的每个小伙子都恰好认识k个姑娘，而每个姑娘也恰好认识k个小伙子；那么每个小伙子（姑娘）可以和他认识的姑娘（她认识的小伙子）结婚。”

作一个二部图，X和Y分别代表男、女青年。一个男青年与某个女青年认识，则在代表他俩的顶点间连一条边。这样可以得到一个各顶点度数均为k的简单二部图。由定理可知，其中存在完美匹配，也就是说每个小伙子均可与他相识的姑娘结婚。

例8·6　图8—12是各顶点度数均为k＝3的二部图。由婚姻定理，可断定它有完美匹配，图中粗线边即为一个完美匹配。读者可以用“匈牙利算法”求出它的最大匹配，此最大匹配必为完美匹配。（当然，它未必是图上给出的那个完美匹配。）



图　8—12

另外，若例8·5中，每张纸的正反面写的两个数字都不同时，那么作出的二部图的各顶点度数都是2，它符合婚姻定理条件，X当然可在X上配对。这是例8·5的一种特别情况。这也说明了婚姻定理是霍尔定理的一种特殊情况。

一个存在完美匹配的图，其中完美匹配不一定只有一个。我们可以进一步在众多的完美匹配中，寻找一个“最好”的。比如工作分派问题中，有许多种分派方案，可以使每项工作有不同的人干且每个人有不同的工作干，这时，我们可以把各人干各项工作的效率（以收益、成本或完成该项工作的时

间等等来衡量）考虑进去，求出总效率最大的完美匹配。（收益最大的分派方案、成本最低的分派方案，时间最短的分派方案等等）这称为最优分派问题。这相当于在图的每条边上赋以一个非负数（效率），称为权数。最优分派问题，就是求权数和最大或最小的完美匹配。这样的匹配称为最优匹配。求最优匹配是一个有重大社会效益和经济效益的实际问题。限于篇幅，不能在此详细介绍了。不过，求一个图的最优匹配的算法，是把它化为求一系列的子图（图G删去一些边或顶点——删去顶点必须同时删去与它相连的所有边——以后得到的新图，称为G的子图）的最大匹配，而求最大匹配就要用到匈牙利算法。这些都可以在电子计算机上实现。

三家三井问题——平面图——地图着色与四色猜想



三家三井问题

我们已经知道，一个图可以有不同的画法，只要不改变两顶点间是否有边相连这一本质，我们当然希望把图画得清楚一点。在图9－1

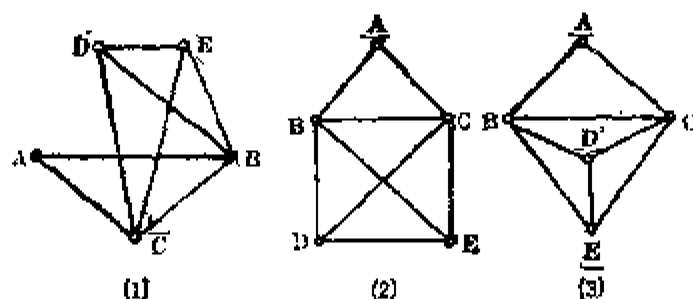
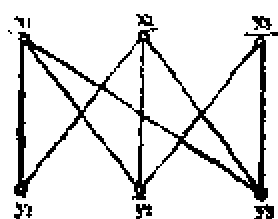


图 9—1

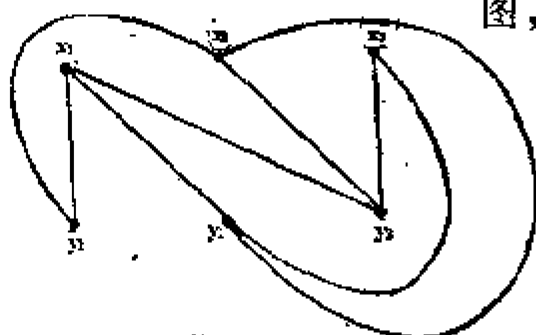
中三个图是一样的，但从左到右，一个比一个看起来要清楚。因为（1）中有很多边交叉，（2）只有两条边交叉，而（3）的任何两条边，除了端点之外，没有其它的交点。

如果能把一个图G的所有顶点与边画在平面上，并且使得任何两条边除了端点之外，没有其它的交点，则称G是一个平面图。

注意，有的图乍看起来有几条边（除端点外）是相交的，但不能就此断定它不是平面图。象图9－1（1）就是一个例子，因为它可以画成图9－1（3），所以它仍是平面图。再如图9—2，


图 9—2

它有更多的边交叉，但它仍可以画在平面上，使它的任何两条边只在端点处相交，见图9—3。


图 9—3

但是有些图却不是平面图，也就是说，不管怎样画，都不可能把它所有顶点与边画在平面上，使得任何两条边仅在端点处相交。在非平面图中，有一个图与“三家三井”的数学游戏有关。

例9·1（三家三井问题）有三户人家x_1、x_2、x_3，有三口井y_1、y_2、y_3，要在每户人家与每口井之间都修一条路，问有没有办法使得9条路互不相交。这问题就是图9—4是不是平面图的问题。注意它与图9—2相比，仅仅多了一条边x_3y_1，图9—3已经画出了它的8条边，但第9条边x_3y_1加上去以后，无论如何要与别的边相交（画一条边时，不能从其它边的顶点穿过去）。读者自己可以试试，你试了各种画法以后会发现，无论哪8

$K_{3,3}$

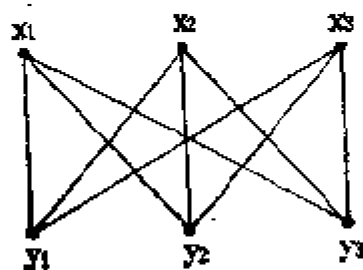


图 9—4

条边，都可以画到平面上，唯独差1条边画不上去。实际上，它是非平面图，而任去一边，即成为平面图。这个图记为$K_{3,3}$。

一个图是不是平面图，在实际应用中是十分重要的。比如几个城镇之间的公路网，应该尽可能设计成：任两条公路，只在这几个城镇处交接，而无其它相交处。这样可以减少交通事故。又比如集成电路板的布线，最好能布在一个平面上，使任两条导线只在焊接点处交接。

哪些图是平面图

非平面图，除了上面那个$K_{3,3}$以外，还有一个重要例子就是图1—2所示的完全图K_5。与$K_{3,3}$类似，K_5任去一边后，就是平面图。

1930年波兰数学家库拉托夫斯基（Kuratowski）给出了一个判断一个图是否是平面图的判别法则。这一法则要用到以下一个概念：

如果在一个图的某些边上插入一些新顶点（这些顶点就成为二度点），得到的新图称为与原图同胚（同一个模子里出来的）。例如图9—5（1）与K_5同胚，而图9—5（2）与$K_{3,3}$同胚。一个图与它本身也看作同胚。

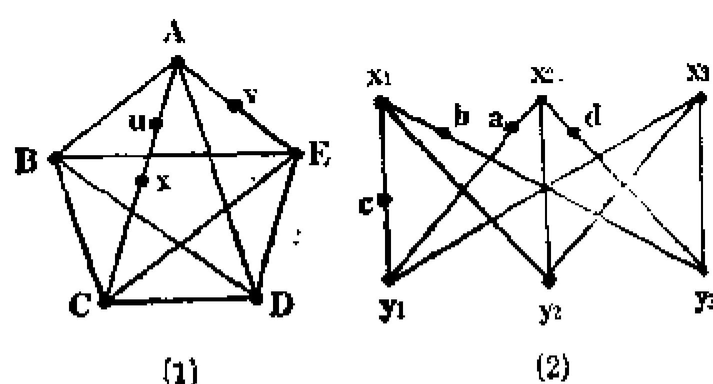


图 9—5

库拉托夫斯基指出：假若一个图不包含与$K_{3,3}$或K_5同胚的子图，则它是一个平面图，否则就是非平面图。

例如图9—6的两个图都是非平面图。因为去掉粗线边后，它们可以分别画成图9—5的（1）或（2），因此它们分别包含与K_5或$K_{3,3}$同胚的

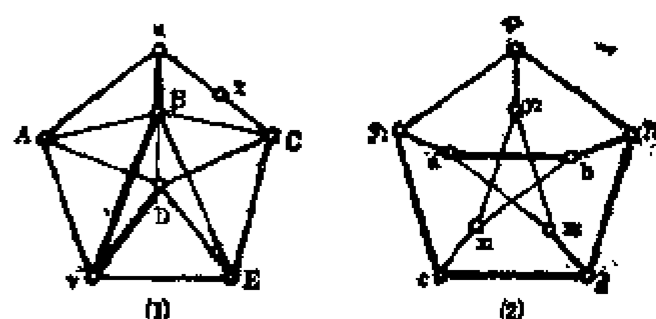


图 9—6

子图，因此它们不是平面图。顶点数$n \geq 5$的完全图K_n都不是平面图，因为删去它任何$(n-5)$个顶点（及与它们相连的所有边）以后，就成为K_5，也就是说K_n包含K_5作为子图，从而是非平面图。不过你从判别图9—6是否为平面图的例子中可以

体会到，要判断它是否含有与K_5或$K_{3,3}$同胚的子图，并非易事，但现在已经可以用电子计算机根据一种“平面性算法”来进行判断了。

地图着色与四色猜想

我们见到的地图，例如我国分省地图或世界地图都是彩色的。着上颜色的目的主要是为了看起来清楚。当然最好一个国家或一个地区用一种颜色，但实际上无此必要，只要使相邻国家或地区的颜色不同就可以了。注意，两个国家或地区相邻，是指它们有公共的一段边界，在图上即为两个区域有公共边。而仅有公共顶点的不算相邻。如图9－7，A与B、A与D、B与C、C与D是相邻的，而B与D、A与C不算相邻。

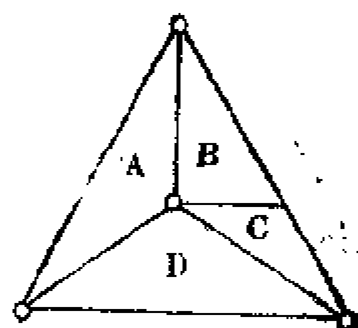


图 9—7

我们可以考虑这样的问题：任何一张地图（它是平面图），要使相邻国家或地区所着的颜色不同，至少要用几种颜色呢？人们早就发现，只用三种颜色肯定不够，象图9—

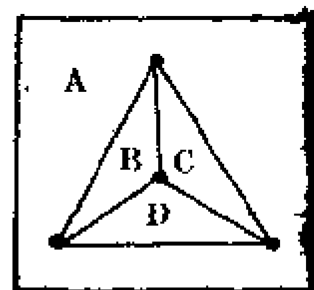


图 9—8

8所示地图，A、B、C、D四个地区中，每个地区都与其它三个地区相邻，所以必须用四种不同颜色来着色。

那么四种颜色是不是够了呢？1850年英国人格思里（Guthrie）告诉德·摩根（De Morgan），他发现他遇到过的所有地图，都可以用四种颜色来染色，因此他提出一个**四色猜想**：

"任何一个平面图，都可以用四种颜色来着色，使得任何两个相邻的区域有不同的颜色。"

这个问题在当时并未引起人们重视，直到1878年，英国数学家凯莱在伦敦数学会上提出四色猜想是否已有证明？并指出证明的困难所在，这才开始引人注目。实际上四色猜想的难度与知名度都不比数论中的哥德巴赫猜想来得小。当代图论学家哈拉里认为："在图论中，也许在全部数学中，最出名的没有解决的问题是著名的四色猜想。任何一个数学家可以在五分钟内将这个非凡的问题向马路上的一个普通人讲清楚。在讲清楚以后，虽然两个人都懂得了这个问题，但要解决它，谁也无能为力。"

四色猜想提出后，很多人试图证明它的正确性，或举出反例来推翻它。就象平面几何中的平行公理一样，在历史上四色猜想有很多貌似正确的错误证明。1879年肯普（Kempe）给出了第一个这样的证明。11年以后，即1890年希伍德（Heawood）

发现了它的错误。希伍德虽未证明四色猜想的正确性，但他指出：如果把“四”换为“五”，就可以证明它的正确性。他的结果被称为“五色定理”。希伍德在证明“五色定理”时，首先把平面地图的着色问题化为平面图的顶点着色问题。方法就是我们在解例5·3时，把一个平面图变为它的对偶图，由对偶图的作法，即可看出，一个平面图的对偶图，仍是平面图。并且，对偶图的一个顶点正好代表了原图的一个区域，而原图的两个区域相邻（有公共边），对应到对偶图上，正是相应的两个顶点相邻（有边相连）。因此“四色猜想”与“五色定理”也可叙述为

“任何一个平面图，均可以用四（五）种颜色给它的顶点着色，使得任何两个相邻的顶点所着的颜色不同。”

为什么一定要是“平面图”呢？因为象K_6这样的非平面图，由于六个顶点彼此都邻接，所以至少要用六种颜色。同理，n个顶点的完全图，至少要用n种颜色给它的顶点着色，才能使任何相邻的顶点着以不同颜色。

四色猜想提出一百多年来，一个数学家的努力失败了，另一个数学家仍不甘心，继续探索，有的是父子两代人都致力于它的研究。因此哈拉里戏谑道：

“四色猜想，真可以改名叫‘四色病’了。因为它真象传染病一样。……还没有发明一种预防针可以对付这种病，它会反复发作，虽然还没有致死的记录，但已经知道它会使人痛苦非凡。这种病至少已经观察到一次它从父亲转移到了儿子，所以它也许是会遗传的。”

直到1969年，奥尔(Ore)和斯坦普尔(Stemple)发表文章，对于少于40个区域的所有地图证明了这个猜想。由此可见，若有否定四色猜想的反例存在，那反例中的区域数也一定很大。

当然，四色猜想本身究竟是否正确并无多大实际意义，多用一种颜色算不了什么“浪费”。但四色猜想是催化剂，它推动了图论及其有关分支的发展。就象哥德巴赫猜想推动了数论的发展一样。因此，当1976年美国的阿普尔(K.Appel)、黑肯(W.Hakan)和考齐(J.Koch)三人宣布，他们用电子计算机计算1200小时以后证明四色猜想正确时，被认为是数学史上一件破天荒的大事。当然，这件事之所以轰动数学界，还不仅仅在于四色猜想被证明，更重要的是它是用电子计算机证明的，这表明，电子计算机已在数学理论研究中扮演了前所未有的重要角色。

印刷电路板的分层问题

最后我们来看图的顶点着色的一个应用（不限于平面图的顶点着色）。为了设计印刷电路板，我们先将电路图画成一个图G，例如象图9—9那样。其中边共12条，以数字表示，它们对应导线，顶点对应接点（无导线连接的两接点之间可能要装配元件）。由于同一层印刷电路板上的导线不允许在接点以外相交，在不改变接点位置，且各导线均要成直线的情况下（即不改变图G所画的状态），所设计的印刷电路板最少需要几层？

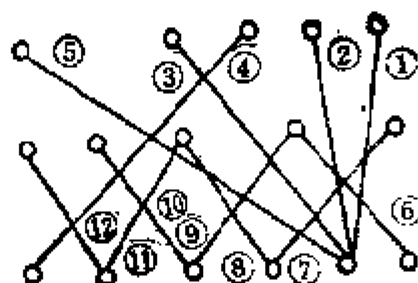


图 9—9

解：我们来作一个新图，它的顶点对应图9—9的边，当图9—9中两条线在顶点之外相交时，新图中对应的两顶点有一边相连。这样得到图9—10。现在来看，图9—10的顶点最少要用几种颜色着色，才能使相邻的两顶点着上不同颜色。由于

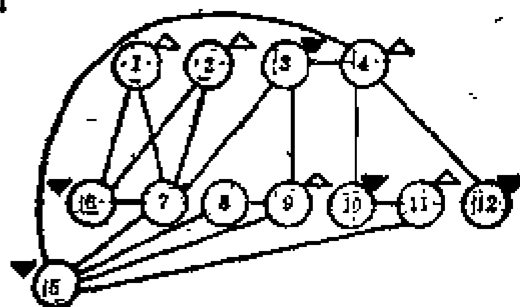


图 9—10

图中存在三角形（顶点②、⑥、⑦或顶点⑤、⑧、⑨），所以起码要三种颜色，实际上三种颜色已够：打△的与打▼的顶点分别着两种不同颜色，顶点⑦与⑧着第三种颜色。现在把图9—10的顶点着色变为图9—9的边着色：图9—10的顶点着什么色，则图9—9中对应的边就着什么色。这时你可看到，在图9—9上着同样颜色的边，彼此都不相交，这是因为对应回去，在图9—10上那些同色的顶点彼此不相邻。所以根据图9—9设计的印刷电路板最少应分为三层，同色的边在同一层，见图9—11所示。对于每个接点来说，三层之间是导通的。

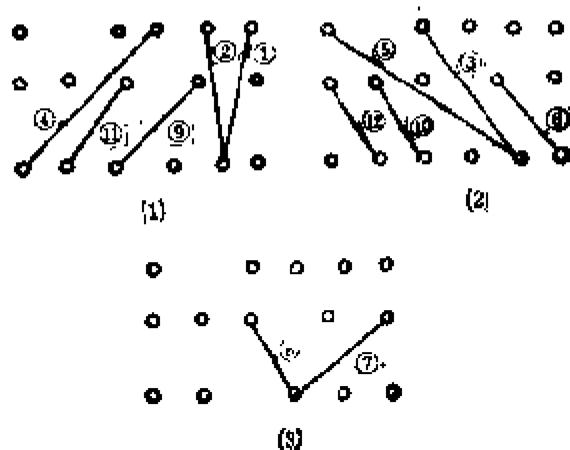
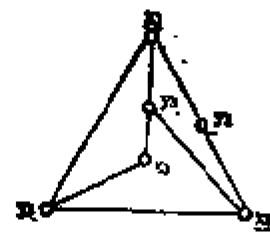


图 9—11

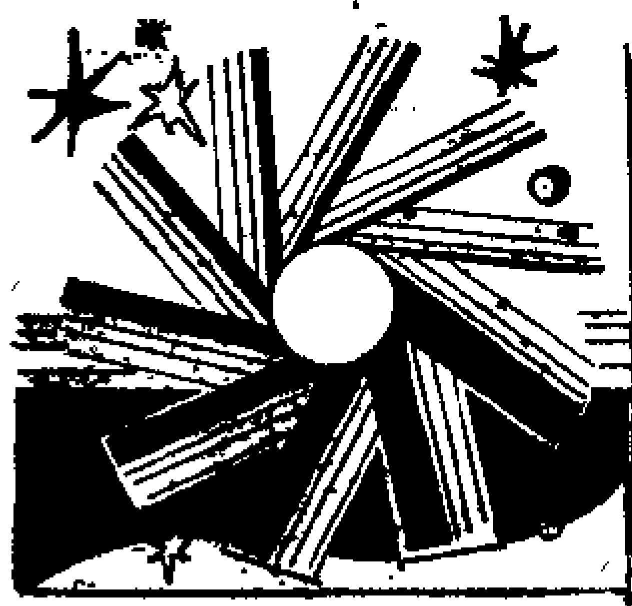
刚才我们为什么要在“不改变接点位置，且各导线均要成直线”的情况下讨论图9—9的分层问题呢？这是因为不加限制的话，把图画成不同样子，得到的分层数可能会不同。比如不改变图9—2所画的状态时，用上面那种解法，应该分为两层：

边x_1y_2、x_1y_3、x_2y_3在同一层；边x_2y_1、x_3y_1、x_3y_2在同一层；边x_1y_1与x_3y_3无论在哪一层均可。但如果允许导线为曲线形，则只要单层印刷板即可，因为它可以画为图9—3的样子。如果允许改变接点位置，则可以画为图9—12，这里的导线仍为直线，此时也只要单层印刷板。


图 9—12

奇
情

20世纪的图论——结束语



我们已把图论的一些概貌展示给了读者。管中窥豹，可见一斑，你已看到它使用直观的和符合美学外形的数学模型——图，为求解包含二元关系的系统提供了一个强有力的科学工具。你还看到，图论这门数学新学科中充满了奇情妙趣，那些把数学冠以“枯燥无味”前缀的看法该是多么的偏颇与无知。

图论作为组合数学的一个新分支，自1736年问世以后，虽然曾一度停滞不前，但自20世纪中期以来，获得飞速的发展和日臻广泛的应用。

1936年，心理学家莱温（K. Lewin）写过一本论述拓扑心理学原理的书，莱温把一个人的“生活空间”用一张平面图来表示，其中各个区域代表一个人的各种活动，例如他的工作环境、他的家与他的嗜好等等。美国“集体活动研究中心”的心理学家提出了图的另外一种心理学解释，其中用顶点表示人，而边表示人与人之间的关系，这些关系包括爱、恨、交往和支配等等。图论方法从此进入了心理学领域。

理论物理学科也不止一次窥用了图论。乌伦伯克（Uhlenbeck）在统计力学的研究中，用顶点表示分子，两个点邻接表示存在某种物理形式的最邻近的相互作用。著名美籍华裔物理学家、诺贝尔

奖金获得者李政道、杨振宁在1959年发表了应用图论研究量子统计力学的论文。

应用图论方法研究复杂的经济系统也有很大的潜力。有人用电网络模拟商品流通，从而使税率涨落、供求关系、商品流通的动态特性等等可以在模拟图上研究。许多经济问题可以看成网络流加以探讨（网络是各边赋以一个数值的某些特定的图）。

在研究模式识别方面，应用图论方法来判定数字化图象的最佳灰度；借助关系树作有效的波形分析；用树构造指纹模式研究自动识别。图论方法在电网络的分析与综合、印刷电路与集成电路的布线与测试的研究中，发挥了卓有成效的作用。图论也为如何模拟生物系统，研究其规律提供了有效的分析方法。

图论在计算机科学、通讯网络、运输网络、线性规划以及运筹学中的应用更为引入注目。图论是计算机科学的重要数学工具，计算机系统可用有向图来模拟。涉及通讯网络的主要问题为系统的可靠性与连通性，这些都离不开图论的理论与算法。而运输网络则要用图论方法来求解最短路径、最小费用、最大流与最优定址。图论在运筹学中的应用很多，其中比较成功的方面之一便是在一项巨大而复杂的项目中的计划安排。1958年美国海军部门为加速“北极星”导弹的研制工作，他们使用网络分析

法，对各项任务安排进行科学的评价和审查，统筹规划、合理布局，保证计划顺利实施。他们使用的方法称为规划审核技术（Program Evaluation and Review Technigue，简称为PERT），这在“统筹法”中是一项成效卓著的方法。

近20年来，图论的发展尤为显著。论述图论及其应用的专著已出版近百种；每年发表的论文逾百篇；国际上定期举行图论及其应用的学术讨论会。

我国各高等院校的应用数学、计算机科学、管理科学、自动控制、无线电技术、军事运筹等专业都相继开设有关图论的课程，招收研究图论硕士研究生与博士研究生。我国图论学者与许多美籍华裔学者在图论的理论研究与应用方面，都取得了丰硕的成果。

随着电子计算机功能的日益增加，图论在自然科学、工程技术、经济管理以及社会科学等各领域中扮演了越来越重要的角色，它的应用日益广泛，并不断开拓富有潜力的新领域。

图论这门学科还十分年轻，还有许多未被开垦的处女地，留待我们去拓荒，还有许多桂冠留待我们去摘取。仅就图论的理论研究来说，邦迪（J·A·Bondy）和默蒂（U·S·Murty）1981年著的《图论及其应用》一书的附录中就列出了50个图论中“尚未解决的问题”（近几年已解决其中几

个）。

亲爱的读者，你是否准备投身到图论研究的行列中，一展你的聪明才智呢？